

# Grau en Matemàtiques

---

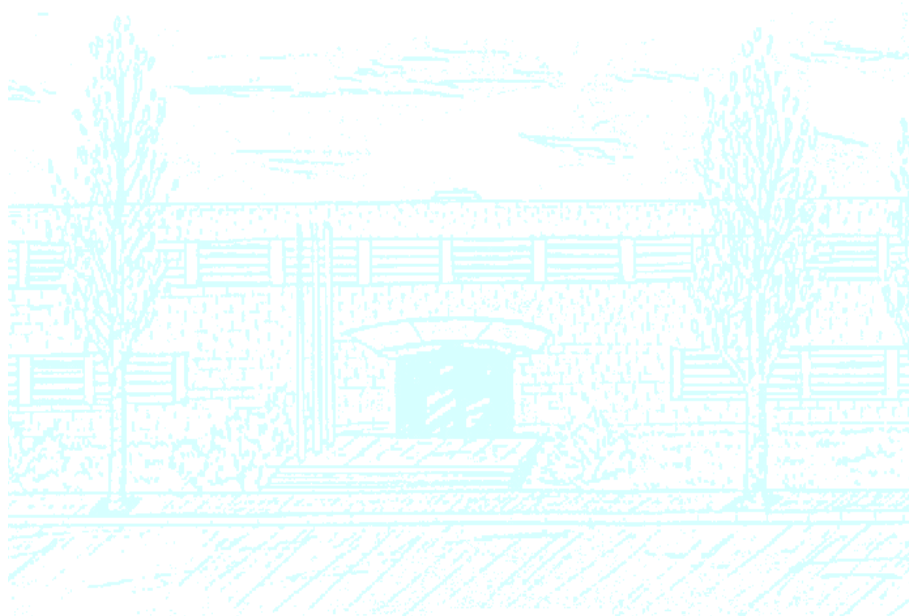
**Títol:** Grups de simetria del pla i aplicacions

**Autor:** Anna Julià Verdaguer

**Director:** Pere Pascual Gainza

**Departament:** Matemàtica Aplicada I

**Convocatòria:** 2013 – 2014





Universitat Politècnica de Catalunya  
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Treball de Final de Grau

# **Grups de simetria del pla i aplicacions**

Anna Julià Verdaguer

Tutor: Pere Pascual Gainza

Departament de Matemàtica Aplicada I





A la meva família i amics, per donar-me suport incondicional.



# Índex

<b>Introducció</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminars</b>	<b>3</b>
1.1 Producte semidirecte .. .. .	3
1.2 Grup lliure i presentacions .. .. .	5
<b>2 Moviments del pla euclidià</b>	<b>9</b>
2.1 Moviments a $\mathbb{E}^n$ .. .. .	9
2.2 Moviments del pla .. .. .	13
2.2.1 Translacions .. .. .	13
2.2.2 Rotacions .. .. .	14
2.2.3 Simetries .. .. .	14
2.2.4 Simetries amb lliscament .. .. .	15
2.3 Classificació de moviments del pla .. .. .	17
2.4 Generadors de $\mathbb{E}(2)$ .. .. .	18
2.4.1 Producte de dues simetries .. .. .	18
2.4.2 Producte de tres simetries .. .. .	19
2.4.3 Generalització .. .. .	19
<b>3 Subgrups discrets del grup euclidià</b>	<b>21</b>
3.1 Què és un subgrup discret? .. .. .	21
3.2 Translacions d'un grup discret .. .. .	22
<b>4 Grups finits i frisos</b>	<b>25</b>
4.1 Grups finits .. .. .	25
4.2 Grups de frisos .. .. .	26
4.2.1 $F$ no conté cap rotació no trivial .. .. .	27
4.2.2 $F$ conté una rotació no trivial .. .. .	28
<b>5 Grups cristal·logràfics plans</b>	<b>31</b>
5.1 Grup puntual .. .. .	31
5.1.1 Acció de $G_0$ sobre $T$ .. .. .	32
5.2 Classificació dels grups cristal·logràfics .. .. .	34
5.2.1 Reticle oblic .. .. .	36
5.2.2 Reticle quadrat .. .. .	38
5.2.3 Reticle hexagonal .. .. .	40

5.2.4	Reticles rectangular i rombal .. .. .	44
<b>Bibliografia</b>		<b>51</b>

# Introducció

Si observem el nostre entorn, ens adonarem que vivim envoltats d'una gran quantitat d'estampats que varien d'estil, de color, d'escala i d'orientació i que el que fan és enriquir l'objecte, la paret, el terra, la pintura, etc. on es trobin.

Els estampats consisteixen en un element base que es va repetint mitjançant moviments euclidians (ja siguin translacions, rotacions, simetries o simetries amb lliscament) de tal manera que s'arriba a cobrir un pla. La pregunta que sorgeix és si podem col·locar aquest element base de tantes formes com vulguem. La resposta és que no: tot i la variació que pugui existir en color, estil, etc., hi ha una limitació en el total de grups d'estampats que es poden obtenir. De fet, n'hi ha exactament 17, de grups, i aquests reben el nom de *grups de simetria del pla euclidià*.

Així doncs, moguda per una barreja de fort interès i de curiositat, l'objectiu d'aquest treball és estudiar i classificar els únics 17 grups de simetria que existeixen en el pla euclidià.

La inquietud per classificar els diferents grups prové de molt antic i requereix molt més que simple observació. Malgrat això, hi ha mètodes més i menys elementals per estudiar-los. D'una banda tenim autors com D. L. Johnson que en el seu llibre *Symmetries* ([4]) permet anar fent un seguiment de la classificació dels 17 grups de simetria de forma força elemental, és a dir, sense entrar en detall en coneixements més abstractes de les matemàtiques. D'altra banda, se'n pot fer un estudi exhaustiu mitjançant forts coneixements en geometria així com en teoria de grups. En són exemples autors com M. A. Armstrong ([1]) o P. J. Morandi ([5]).

Artistes moderns com M.C. Escher (Països Baixos, 1898 - 1972) també en van fer el seu particular estudi. Escher va deixar moltes representacions gràfiques i artístiques d'aquests grups i, fins i tot, va anar més enllà estudiant el pla hiperbòlic. Una continuació natural d'aquest treball, certament més ambiciosa i que quedarà per a futurs estudis, consistiria en l'anàlisi dels grups de simetria del pla hiperbòlic. En aquest cas, es requereix l'ús d'elements de variable complexa i el nombre de grups es multiplica.

El que s'ha fet en aquest treball és utilitzar els coneixements adquirits a assignatures com Geometria Afi i Euclidiana i Estructures Algebraiques per fer un estudi semielemental dels grups de simetria i arribar a classificar-ne els 17 tipus. L'estructura del treball es basa en dues parts diferenciades, tot i haver-hi més capítols: una primera de preliminars, on es fa un recordatori de molts conceptes ja adquirits al llarg de la

carrera i se n'introdueixen alguns de nous, i una segona on ens endinsem en l'estudi i classificació dels grups. En particular, aquesta segona part, que s'estén al llarg dels capítols 4 i 5, és el cos del treball on es fa un estudi detallat dels subgrups discrets del pla euclidià.

# 1

# Preliminars

Aquest treball té una base molt important de conceptes donats a les assignatures de Geometria Afí i Euclidiana i d'Estructures Algebraiques i, per tant, molts d'aquests coneixements es donaran per sabuts i no en farem especial èmfasi en definir-los.

Tot i així, creiem que cal fer alguns comentaris previs al desenvolupament del cos del treball per introduir conceptes nous, com ara el producte semidirecte de grups, o per recordar-ne d'altres que seran eines bàsiques durant la resta de l'estudi.

## 1.1 Producte semidirecte

En aquesta secció, analitzarem quan un grup  $G$  es pot descompondre com a producte de dos subgrups.

**Definició 1.1.1** Sigui  $G$  un grup i  $H, K \subseteq G$  subgrups d'aquest. Aleshores, diem que  $H$  és un *complement* de  $K$  en  $G$  si  $K \cap H = \{1\}$  i  $KH = G$ .

Si un dels subgrups és normal, fem referència al *producte semidirecte* que, en teoria de grups, és una generalització del producte directe.

**Definició 1.1.2** Sigui  $G$  un grup,  $H$  un subgrup normal de  $G$ , és a dir  $H \triangleleft G$ , i  $K$  un subgrup de  $G$  tal que  $K \cap H = \{1\}$ . Aleshores, podem considerar la descomposició

$$G = KH.$$

En aquesta situació, es diu que  $G$  és un *producte semidirecte* de  $K$  i  $H$  i es denota per  $G = K \rtimes H$ .

**Observació 1** Si  $K \triangleleft G$  és un subgrup normal, aleshores

$$G/K \longrightarrow H$$

és un isomorfisme i, per tant,  $G$  és un producte semidirecte de  $K$  i  $G/K$ .

**Observació 2** Si  $K, H$  són ambdós subgrups normals de  $G$ , tenim la descomposició de  $G$  en producte directe de  $K$  i  $H$

$$G \cong K \times H.$$

És a dir, existeix una aplicació bijectiva

$$\begin{array}{ccc} K \times H & \longrightarrow & G \\ (k, h) & \longrightarrow & kh \end{array}$$

de tal manera que cada element  $g \in G$  admet una única descomposició  $g = kh$ , amb  $k \in K$  i  $h \in H$ . Per veure que la descomposició és única, suposem que existeix una segona descomposició  $g = ab$  amb  $a \in K$  i  $b \in H$ . Si existís aquesta segona descomposició, tindríem  $a^{-1}k = bh^{-1} \in K \cap H$  però, per hipòtesi,  $K \cap H = \{1\}$ . Per tant, hem arribat a contradicció i deduïm que la descomposició és única.

Ara bé, així com en el producte directe podem definir l'operació següent

$$(k, h)(k', h') = (kk', hh'),$$

en general aquesta no es compleix per tots els grups. En el cas de la descomposició de  $G$  pel producte semidirecte, en aquesta operació entra en joc l'acció per conjugació de  $H$  a  $K$

$$\begin{array}{ccc} \alpha : & H & \longrightarrow \text{Aut}(K) \\ & h & \longrightarrow \alpha_h, \end{array}$$

on  $\alpha_h$  és l'automorfisme de conjugació per  $h$

$$\begin{array}{ccc} \alpha_h : & K & \longrightarrow K \\ & k & \longrightarrow hkh^{-1}. \end{array}$$

D'aquesta manera, si considerem dues parelles  $(k, h), (k', h') \in K \rtimes_{\alpha} H$ , definim el seu producte semidirecte com

$$(k, h)(k', h') = (k\alpha_h(k'), hh').$$

Anem a veure alguns exemples de grups que es poden descompondre com a producte semidirecte de dos dels seus subgrups. Els considerem a continuació.

**Exemples 1.1.3** 1) Sigui  $\mathbb{A}$  el grup afí format per totes les transformacions afins bijectives entre espais vectorials. Considerem dos subgrups d'aquest:  $\mathbb{T}$ , grup de translacions, i  $GL$ , grup de transformacions lineals.

Observem que aquests dos subgrups són un producte semidirecte del grup afí ja que  $\mathbb{T} \cap GL = \{1\}$ ,  $\mathbb{T} \triangleleft \mathbb{A}$  i  $GL\mathbb{T} = \mathbb{A}$ .

En forma matricial, els elements del grup afí són de la forma

$$M = \left( \begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = (b, A),$$

on l'última igualtat és només per simplificar la notació, mentre que una translació és de la forma  $(v, I)$ .



Siguin  $M \in \mathbb{A}$  i  $M' \in \mathbb{T}$ . Fer el seu producte no és directe sinó que obtenim el producte semidirecte tal i com l'hem definit anteriorment

$$MM' = (b, A)(v, I) = (A(v) + b, A)$$

i ens cal estudiar l'acció de conjugació sobre  $(v, I)$ . Aquesta, per la definició anterior, serà

$$(b, A)(v, I)(b, A)^{-1} = (b, A)(v, I)(-A^{-1}b, A^{-1}) = (A(v), I).$$

És a dir, en aquest exemple  $\mathbb{A} = \mathbb{T} \rtimes_{\alpha} GL$ , on

$$\begin{aligned} \alpha_A : \quad \mathbb{T} &\longrightarrow \mathbb{T} \\ (v, I) &\longrightarrow (A(v), I) \end{aligned}$$

i, per tant,

$$\alpha : GL \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{T}).$$

- 2) El grup diedral  $\mathbb{D}_n$  és producte semidirecte de  $\mathbb{Z}_n$  i  $\mathbb{Z}_2$  ja que el podem considerar generat per  $\langle a, b \rangle$ , on  $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_n$  és subgrup normal del diedral i  $\langle b \rangle \cong \mathbb{Z}_2$  és un complement de  $\langle a \rangle$ .
- 3) El grup  $T$  d'ordre 12 és producte semidirecte de  $\mathbb{Z}_3$  i  $\mathbb{Z}_4$ . Sigui  $\mathbb{Z}_3 = \langle a \rangle$  i  $\mathbb{Z}_4 = \langle b \rangle$ . Definim  $\alpha : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_2$  que envia  $a$  al generador. En concret, tenim

$$a^b = a^2 \quad \text{i} \quad (a^2)^b = a,$$

mentre que  $x^2$  actua sobre  $\langle a \rangle$  com la identitat  $a^{x^2} = a$ .

El grup  $G = \mathbb{Z}_3 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_4$  té ordre 12. Sigui  $s = (a^2, x^2) \in G$  i  $t = (1, x) \in G$ , aleshores es pot comprovar que

$$s^6 = 1 \quad \text{i} \quad t^2 = s^3 = (st)^2,$$

que són relacions de  $T$ .

- 4) Sigui  $\mathbb{E}(n)$  el *grup de moviments* format per totes les isometries associades a la mètrica Euclidiana en l'espai afí  $\mathbb{E}^n$ . Podem considerar aquest grup com el producte semidirecte de dos dels seus subgrups:

$$\mathbb{E}(n) = \mathbb{T}_n \rtimes O(n),$$

on  $\mathbb{T}_n$  és el *grup de translacions* i  $O(n)$  és el grup de matrius ortogonals  $n \times n$ , és a dir, aquelles tal que  $AA^t = Id$ .

Aquest últim exemple considerat per  $n = 2$  és, de fet, el que desenvoluparem durant tot el treball per poder fer la classificació dels grups de simetria del pla.

## 1.2 Grup lliure i presentacions

Sigui  $S$  un conjunt finit  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$  i considerem el conjunt format pels elements de  $S$  i els seus inversos

$$\overline{S} = S \cup S^{-1} = \{a_1, a_2, \dots, a_r, a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_r^{-1}\}.$$

Amb això, podem construir el següent conjunt

$$F_r = \{s_1 s_2 \dots s_n \mid s_i \in \overline{S}, s_{i+1} \neq s_i^{-1}\} \cup \{1\},$$

els elements del qual s'anomenen *paraules*. Aquestes han de ser *reduïdes*, és a dir, no poden contenir cap parella  $aa^{-1}$  o  $a^{-1}a$ . A més, afegim 1 que serveix d'element neutre i rep el nom de *paraula buida*.

Definim, ara, la *concatenació* de dues paraules que utilitzarem com a operació de  $F_r$ :

$$(s_1 s_2 \dots s_n)(t_1 t_2 \dots t_m) = s_1 s_2 \dots s_n t_1 t_2 \dots t_m$$

de tal manera que si  $s_n = t_1^{-1}$ , aquests dos elements s'esborren. Se segueix amb el mateix procediment fins a obtenir una paraula reduïda o 1.

**Definició 1.2.1** Amb l'operació de concatenació de paraules,  $F_r$  és un grup i rep el nom de *grup lliure de rang  $r$* .

S'anomena grup lliure perquè està "lliure" d'igualtats: paraules diferents són elements diferents del grup. Per exemple, per  $r = 1$ , tenim el grup lliure  $F_1 = \mathbb{Z}$ .

**Teorema 1.2.2** Si tenim una aplicació  $f$  de  $S$  en un grup qualsevol  $G$ , aleshores existeix un únic homomorfisme de  $F_r$  en  $G$  que estén  $f$ .

**Corol·lari 1.2.3** Si un grup  $G$  es pot generar amb  $r$  elements, aleshores és un quocient de  $F_r$ .

Sigui  $R$  el nucli de l'homomorfisme de  $F_r$  a  $G$ , aleshores

$$F_r/R \cong G.$$

**Definició 1.2.4** Els elements de  $R$  s'anomenen *relacions* i el subgrup  $R \triangleleft F_r$  rep el nom de *subgrup de relacions de  $G$* .

D'aquesta manera, podem definir la presentació d'un grup:

**Definició 1.2.5** Diem que  $\langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$  és una *presentació finita de  $G$*  si

$$G \cong F_n / \langle\langle r_1, \dots, r_m \rangle\rangle,$$

on  $\langle\langle r_1, \dots, r_m \rangle\rangle$  és la *clausura normal* de  $\{r_1, \dots, r_m\}$ , és a dir, el subgrup normal més petit que conté aquest conjunt.

De la presentació,  $\{a_1, \dots, a_n\}$  s'anomenen *generadors* mentre que  $\{r_1, \dots, r_m\}$  s'anomenen *relacions*.

Anem a veure'n un exemple:

**Exemple 1.2.6** Considerem el grup dihedral  $\mathbb{D}_4$  de moviments del quadrat en el pla. Aquest té per presentació

$$\langle r, s \mid r^4, s^2, (rs)^2 \rangle,$$

on  $r$  i  $s$  són elements del grup lliure  $F_2$  que relacionem amb la rotació de  $\frac{\pi}{2}$  i la simetria respecte una diagonal, respectivament.

Amb aquestes relacions, observem que  $s$  només pot aparèixer amb exponent 1 mentre que de rotacions podem considerar  $r$ ,  $r^2$  i  $r^3$ . Deduïm, doncs, que  $\mathbb{D}_4$  té, només, 8 elements:

$$\{1, r, r^2, r^3, s, rs, r^2s, r^3s\}$$

ja que ens fixem que  $sr = r^{-1}s^{-1} = r^3s$  on hem utilitzat la relació  $(rs)^2 = rsrs = 1$ .

Un cop vistes les presentacions, ens serà de gran utilitat poder canviar d'una presentació a una altra. Per això, introduïm el següent concepte que ens facilitarà aquest procés.

**Definició 1.2.7** Anomenem *transformacions de Tietze* a aquelles eines utilitzades per transformar una presentació en una altra, normalment molt més simple, d'un mateix grup.

De fet, el que obtenim és la presentació d'un grup isomorf. Sigui  $G$  un grup amb presentació  $\langle X \mid R \rangle$ , on  $X$  és el conjunt de generadors i  $R$  el conjunt de relacions, aleshores  $G$  és isomorf a  $\langle X' \mid R' \rangle$  si  $X'$  i  $R'$  s'han obtingut fent alguna de les següents transformacions elementals:

- *afegir una relació  $r$*  de tal manera que  $X' = X$  i  $R' = R \cup \{r\}$ , amb  $r \in \overline{R} \setminus R$ ;
- *treure una relació  $r$*  de tal manera que  $X' = X$  i  $R' = R \setminus \{r\}$ , amb  $r \in R \cap \overline{R} \setminus \{r\}$ ;
- *afegir un generador  $y$*  de tal manera que  $X' = X \cup \{y\}$  i  $R' = R \cup \{y^{-1}w\}$ , on  $w \in \langle y, X \rangle$ ; o
- *treure un generador  $y$*  de tal manera que  $X' = X \setminus \{y\}$  i  $R' = R \setminus \{y^{-1}w\}$ , on  $w \in \langle y, X \rangle$ .

Aquestes transformacions seran de força ajuda de cara a la classificació dels grups de simetria del pla.



# 2

## Moviments del pla euclidià

En aquest capítol, farem un repàs de conceptes ja vistos en l'assignatura de Geometria Afí i Euclidiana, com en són els moviments en el pla euclidià, amb la voluntat de donar-ne definicions més detallades i aprofundir en les seves propietats. Aquests seran els elements principals sobre els quals treballarem per fer la classificació final dels grups de simetria.

### 2.1 Moviments a $\mathbb{E}^n$

Sigui  $\mathbb{E}^n$  un espai euclidià que identifiquem amb  $\mathbb{R}^n$  amb el producte escalar ordinari. Sobre aquest espai, podem definir:

**Definició 2.1.1** Una aplicació  $f : \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^n$  és un *moviment* si conserva les distàncies, és a dir, donats  $p, q \in \mathbb{E}^n$  qualssevol, es compleix

$$d(p, q) = d(f(p), f(q)),$$

on  $d(p, q)$  és la distància euclidiana entre  $p$  i  $q$ ,

$$d(p, q) = \|q - p\|.$$

**Proposició 2.1.2** 1) *La composició de moviments és un moviment.*

2) *Tot moviment és bijectiu i l'aplicació inversa també és un moviment.*

**Demostració 1** 1) Siguin  $f, g \in \mathbb{E}(n)$  dos moviments i  $p, q \in \mathbb{E}^n$  dos punts qualssevol. Definim  $h = g \circ f$  i anem a comprovar que també és moviment:

$$\begin{aligned} d(h(p), h(q)) &= d(g(f(p)), g(f(q))) && (g \text{ és moviment}) \\ &= d(f(p), f(q)) && (f \text{ és moviment}) \\ &= d(p, q). \end{aligned}$$

Concloem, doncs, que  $h$  és moviment.

2) Sigui  $f$  un moviment i  $p, q \in \mathbb{E}^n$  dos punts qualssevol. Primer de tot veurem que  $f$  és bijectiu.

- Per veure la *injectivitat*, observem que si  $f(p) = f(q)$ , aleshores  $d(f(p), f(q)) = 0$ . Com que  $f$  és moviment, manté les distàncies i, per tant,  $d(p, q) = 0$ . Necessàriament, doncs,  $p = q$  i  $f$  injectiva.
- Per veure l'*exhaustivitat*, prenem un punt  $p$  tal que  $f(p) = p'$  i un punt  $q$  qualsevol. Volem veure que existeix  $q'$  tal que  $f(q) = q'$ . Fem una circumferència de centre  $p'$  i radi  $d(p', q')$ . Com que  $f$  és moviment, aleshores existeix una circumferència de centre  $p$  i del mateix radi  $d(p', q')$ . Per tant, existeix  $q$  tal que  $f(q) = q'$ .

Definim  $g = f^{-1}$  i anem a veure que, efectivament, l'aplicació inversa d'un moviment és un moviment:

$$\begin{aligned} d(g(p), g(q)) &= d(f^{-1}(p), f^{-1}(q)) && (f \text{ és moviment}) \\ &= d(f(f^{-1}(p)), f(f^{-1}(q))) \\ &= d(p, q), \end{aligned}$$

és a dir,  $g$  preserva les distàncies i, per tant,  $f$  és bijectiva i la seva inversa  $g = f^{-1}$  també.

□

D'aquesta manera,

**Definició 2.1.3** Anomenem *grup euclidià* al conjunt de moviments euclidians que, amb la composició de funcions, formen un grup. El denotem  $\mathbb{E}(n)$ .

**Proposició 2.1.4** *Sigui  $f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  un moviment, aleshores  $f$  és una afinitat. Prenent  $\mathcal{R} = \{p; u_1, \dots, u_n\}$  un sistema de referència ortonormal a  $\mathbb{E}^n$ , la matriu de  $f$  en la referència  $\mathcal{R}$  és de la forma*

$$A = M_{\mathcal{R}}(f) = \left( \begin{array}{ccc|c} & & & a^1 \\ & M & & \vdots \\ & & & a^n \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right),$$

on  $f(p)_{\mathcal{R}} = (a^1, \dots, a^n)$  i  $M^t M = Id$ .

**Nota 1** De forma compacta, podem descriure un moviment per  $(v, M)$  on  $v = (a^1, \dots, a^n)$ . Més endavant, utilitzarem aquesta notació per simplificar.

Segons el determinant de  $M$  distingim dos tipus de moviments.

**Definició 2.1.5** (i) Diem que un moviment  $f$  de  $\mathbb{E}^n$  és *directe* si  $\det M = 1$ . El conjunt de moviments directes, que conserven l'orientació, formen un subgrup del grup euclidià que denotem  $\mathbb{E}(n)^+$ .

(ii) Diem que un moviment  $f$  de  $\mathbb{E}^n$  és *invers* si  $\det M = -1$ . Denotem el conjunt de moviments inversos  $\mathbb{E}(n)^-$ .

Més endavant veurem amb més detall aquests dos conjunts, però la idea és que donat  $s \in \mathbb{E}(n)^-$ , qualsevol altre element de  $\mathbb{E}(n)^-$  ve donat per  $\sigma s$  on  $\sigma$  és un moviment directe. Donat  $s \in \mathbb{E}(n)^-$ , l'aplicació que envia tot  $\sigma \in \mathbb{E}(n)^+$  a  $\sigma s \in \mathbb{E}(n)^-$  és bijectiva.

Tot i l'expressió vista en la proposició 2.1.4, podem considerar també una forma reduïda de les matrius dels moviments que exposem a continuació.

**Teorema 2.1.6** *Sigui  $f : \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^n$  un moviment. Aleshores, existeix una referència ortonormal i una descomposició  $n = 2t + s + r$  tal que la matriu de  $f$  en aquesta referència és*

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} B_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & B_t & & \vdots \\ & & & -I_s & 0 \\ & & & & I_r \\ \hline 0 & \dots & & 0 & 1 \end{array} \right),$$

on les matrius  $B_i$  són de la forma

$$B_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}$$

i  $a \in \mathbb{E}$  és

(i)  $a = 0$ , si  $f$  té algun punt fix;

(ii)  $a \neq 0$  si no té punts fixos.

En aquest segon cas,  $r \neq 0$  necessàriament.

**Demostració 2** Recordem que la matriu de  $f$  en la referència canònica és

$$A = M_{\mathcal{R}}(f) = \left( \begin{array}{c|c} M & v \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right),$$

on  $M$  és la matriu de la isometria lineal  $\tilde{f}(u) = f(u) - f(0)$  i  $v = f(0)$ .

Pel teorema fonamental de les isometries lineals, existeix una base ortonormal  $u_1, \dots, u_n$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que la matriu de  $\tilde{f}$  és de la forma

$$\begin{pmatrix} B_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & B_t & & \\ & & & -I_s & \\ & & & & I_r \end{pmatrix}.$$

Així, en la referència  $\mathcal{R}' = \{0; u_1, \dots, u_n\}$ , la matriu de  $f$  és

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} B_1 & & & & b^1 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & B_t & & \vdots \\ & & & -I_s & \vdots \\ & & & & I_r \\ \hline 0 & \dots & & 0 & 1 \end{array} \right),$$

on  $f(0) = b^1 u_1 + \dots + b^n u_n$ . Ara, doncs, ens cal diferenciar els dos casos de l'enunciat:

- (i) Si  $f$  té un punt fix  $p \in \mathbb{E}^n$ , el prenem com a origen de la nostra referència  $\mathcal{R} = \{p; u_1, \dots, u_n\}$ , i obtenim la forma que volíem on  $a = 0$ .
- (ii) Suposem que  $f$  no té punts fixos. Aleshores,  $\lambda = 1$  és necessàriament un valor propi, és a dir,  $r \neq 0$ . Per tant,

$$\begin{aligned} F &= \ker(\tilde{f} - I) \\ &= \{\text{vectors propis de valor propi } \lambda = 1\} \neq 0. \end{aligned}$$

A partir d'aquí, ens cal trobar un punt  $p \in \mathbb{E}^n$  tal que  $\overrightarrow{pf(p)} \in F$  ja que així, prenent com a nova referència  $\mathcal{R} = \{p; u_1, \dots, u_n\}$  de manera que  $u_n = \frac{\overrightarrow{pf(p)}}{\|\overrightarrow{pf(p)}\|}$ , en resulta

$$f(p) = p + \overrightarrow{pf(p)} = p + \|\overrightarrow{pf(p)}\| \cdot u_n.$$

Aleshores, només ens caldrà prendre  $a = \|\overrightarrow{pf(p)}\|$ .

Busquem, doncs,  $p$ . Observem que  $p = 0 + \overrightarrow{0p}$ , aleshores

$$\begin{aligned} f(p) &= f(0) + \tilde{f}(\overrightarrow{0p}), \\ \overrightarrow{pf(p)} &= \overrightarrow{0f(0)} + (\tilde{f} - I)(\overrightarrow{0p}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sigui  $\pi : E \longrightarrow F^\perp$  la projecció ortogonal. Com que  $E = F \oplus F^\perp$ , es té

$$\overrightarrow{pf(p)} \in F \Leftrightarrow \pi(\overrightarrow{pf(p)}) = 0.$$

Usant (2.1),

$$\pi(\overrightarrow{pf(p)}) = 0 \Leftrightarrow (\tilde{f} - I)_{F^\perp}(\overrightarrow{0p}) = -\overrightarrow{0f(0)}_{F^\perp},$$

on aquesta notació indica l'ortogonal del vector corresponent.

Ara bé,  $(\tilde{f} - I)_{F^\perp}$  és invertible ja que  $\lambda = 1$  no és valor propi de  $\tilde{f}_{F^\perp}$ . Així doncs,

$$\overrightarrow{0p} = -(\tilde{f} - I)_{F^\perp}^{-1}(\overrightarrow{0f(0)}_{F^\perp}),$$

i el punt  $p \in \mathbb{E}^n$  queda determinat tal i com volíem.

□



## 2.2 Moviments del pla

A partir d'aquí, treballarem en el pla euclidià  $\mathbb{E}^2$  i classifiquem els moviments en aquest.

Hi ha quatre tipus bàsics de moviments del pla euclidià: les *translacions*, les *rotacions*, les *simetries* i les *simetries amb lliscament*. Tot seguit, les veurem amb més detall. Per cadascun dels quatre tipus de moviments, en farem primer una aproximació geomètrica, posteriorment una de més analítica i, per últim, en veurem algunes propietats.

### 2.2.1 Translacions

**Definició 2.2.1** Una *translació* per un vector  $v \in \mathbb{E}^2$  és una transformació  $t : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$  definida per

$$t(x) = x + v,$$

per tot  $x \in \mathbb{E}^2$ .

Segons la proposició 2.1.4, en la referència canònica podem escriure la matriu d'una translació de la següent forma

$$\left( \begin{array}{cc|c} I & & \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

on  $v = (a, b)$ .

**Observació 3** De forma compacta denotem les translacions per un vector  $v$  com  $(v, I)$  o  $t_v$ .

**Teorema 2.2.2** El conjunt de totes les translacions formen un subgrup abelià del grup euclidià  $\mathbb{E}(2)$  isomorf a  $\mathbb{R}^2$ . El denotem  $\mathbb{T}$ .

**Demostració 3** Siguin  $t_u, t_v \in \mathbb{T}$  amb  $u, v \in \mathbb{E}^2$  definides per  $t_u(x) = u + x$ ,  $t_v(x) = v + x$  per tot  $x \in \mathbb{E}^2$ . Aleshores,

$$t_u t_v^{-1}(x) = t_u((-v) + x) = u + ((-v) + x) = (u - v) + x.$$

Per tant,  $t_u t_v^{-1}$  és un translació pel vector  $u - v$  i, per tant, pertany a  $\mathbb{T}$ . Observem, a més, que  $t_u t_v^{-1} = t_v^{-1} t_u$  la qual cosa implica que, efectivament,  $\mathbb{T}$  és un subgrup abelià del grup euclidià.

□

### 2.2.2 Rotacions

**Definició 2.2.3** Una *rotació* d'angle  $\theta$  al voltant d'un punt  $c$  és una transformació que deixa fix  $c$  i que envia  $p$  a  $p'$  de tal manera que  $d(c, p) = d(c, p')$  i que l'angle directe entre els segments  $\overline{cp}$  i  $\overline{cp'}$  és  $\theta$ .

Denotarem les rotacions per  $r(c, \theta)$  o  $r_{c, \theta}$  on  $c$  és el centre de rotació i  $\theta$  és l'angle de rotació. Podem aconseguir-la traslladant  $c$  a l'origen, fent la rotació al voltant d'aquest i tornant a traslladar l'origen a  $c$ , és a dir,

$$r_{c, \theta} = t_c \circ r_{O, \theta} \circ t_{-c}.$$

Segons la proposició 2.1.4, en la referència canònica podem escriure la matriu d'una rotació de centre l'origen 0 de la següent forma

$$\left( \begin{array}{cc|c} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

**Observació 4** De forma compacta denotem les rotacions  $(0, A)$ .

**Teorema 2.2.4** El conjunt de rotacions amb centre  $c$  formen un subgrup abelià de  $\mathbb{E}(2)$ .

**Demostració 4** Siguin  $r_{c, \theta}$ ,  $r_{c, \varphi}$  dues rotacions de centre  $c$ . Aleshores,

$$\begin{aligned} r_{c, \theta} \circ r_{c, \varphi} &= \left( \begin{array}{cc|c} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{cc|c} \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi & 0 \\ \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{cc|c} \cos(\theta + \varphi) & -\sin(\theta + \varphi) & 0 \\ \sin(\theta + \varphi) & \cos(\theta + \varphi) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &= r_{c, \theta + \varphi}, \end{aligned}$$

que també és una rotació de centre  $c$  tal i com volíem veure. En aquest cas d'angle  $\theta + \varphi$ . □

### 2.2.3 Simetries

**Definició 2.2.5** Una *simetria* respecte una recta  $l$ , que rep el nom d'*eix de simetria*, és una transformació  $s_l$  definida per

$$s_l(p) = \begin{cases} p, & \text{si } p \text{ està en } l; \\ q, & \text{si } p \text{ no està en } l \text{ i } l \text{ és la mediatriu de } pq. \end{cases}$$

Per la proposició 2.1.6, en la referència canònica podem escriure la matriu d'una simetria respecte una recta que passa per l'origen de la següent forma

$$\left( \begin{array}{cc|c} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

on  $\varphi$  és el doble de l'angle que forma l'eix de simetria amb l'eix  $\{x = 0\}$ .

**Observació 5** De forma compacta les denotem  $(0, B)$  on  $B$  és la matriu depenent de  $\varphi$  anterior.

## 2.2.4 Simetries amb lliscament

**Definició 2.2.6** Una *simetria amb lliscament* consisteix en una simetria respecte la recta  $l$  seguida d'una translació.

Donat un vector  $v \in \mathbb{E}^2$ , podem definir la simetria amb lliscament  $g$  com

$$g = t_v \circ s_l.$$

Per la proposició 2.1.6, en la referència canònica podem escriure la matriu d'una simetria amb lliscament de la següent forma

$$\left( \begin{array}{cc|c} \cos \varphi & \sin \varphi & a \\ \sin \varphi & -\cos \varphi & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

on  $\varphi$  és el doble de l'angle que forma l'eix de simetria amb l'eix  $\{x = 0\}$  i  $v = (a, b)$  és el vector de translació. Canviant la recta  $l$  per una paral·lela adequada, podem suposar que  $v$  és paral·lel a  $l$ .

Ja hem definit  $\mathbb{T}$  com el subgrup format per translacions. Sigui ara  $O(2)$  el subgrup de  $\mathbb{E}(2)$  format per totes les transformacions ortogonals, és a dir, rotacions al voltant de l'origen i simetries respecte rectes que passen per l'origen. Pel que acabem de veure, podem observar que tot moviment es pot obtenir composant una translació amb una transformació ortogonal, és a dir,

$$\mathbb{E}(2) = \mathbb{T}O(2).$$

D'altra banda, la seva intersecció és la identitat,  $\mathbb{T} \cap O(2) = \{1\}$ , ja que tota translació no trivial mou l'origen mentre que tot element de  $O(2)$  que el deixa fix. Aquest és un cas particular per  $n = 2$  de l'exemple 4 del capítol anterior. Per aquest motiu, podem deduir:

**Proposició 2.2.7** Cada isometria admet una única descomposició en una transformació ortogonal seguida d'una translació.

**Demostració 5** Suposem que un moviment  $g$  admet dues possibles descomposicions  $g = tf = t'f'$ , on  $t, t' \in \mathbb{T}$  i  $f, f' \in O(2)$ . Si això succeís,  $(t')^{-1}t = f'f^{-1}$  estaria en  $\mathbb{T} \cap O(2) = \{1\}$  i només és possible si  $t = t'$  i  $f = f'$ .

□

En aquestes condicions, sigui  $g = tf$  podem tornar a diferenciar els dos tipus de moviments:

- si  $f$  és una rotació, aleshores  $g$  és un *moviment directe*;
- altrament, si  $f$  és una simetria, aleshores  $g$  és un *moviment invers*.

Anant més enllà, suposem  $f \in O(2)$ ,  $t \in \mathbb{T}$  i  $t(0) = v$ . Aleshores, per tot  $x \in \mathbb{E}^2$  tenim

$$\begin{aligned} ftf^{-1}(x) &= f(v + f^{-1}(x)) \\ &= f(v) + f(f^{-1}(x)) \\ &= f(v) + x, \end{aligned}$$

que és una translació pel vector  $f(v)$ . Així doncs, observem que  $\mathbb{T}$  és un subgrup normal de  $\mathbb{E}(2)$ .

Arribats a aquest punt i recordant el concepte de producte semidirecte definit anteriorment, ens fixem que tenim una correspondència

$$g \rightarrow (t, f),$$

que és un isomorfisme entre  $\mathbb{E}(2)$  i el producte semidirecte  $\mathbb{T} \rtimes_{\alpha} O(2)$  on

$$\alpha : O(2) \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{T})$$

ve donada per la conjugació. Amb això, concloem el següent resultat que nosaltres considerarem pel cas del pla euclidià però que es pot estendre per a tot espai euclidià.

**Proposició 2.2.8** *Els moviments del pla euclidià es poden descompondre*

$$\mathbb{E}(2) = \mathbb{T} \rtimes_{\alpha} O(2)$$

*o, de forma general en l'espai euclidià  $\mathbb{E}^n$ ,*

$$\mathbb{E}(n) = \mathbb{T} \rtimes_{\alpha} O(n),$$

*per a tot  $n \in \mathbb{N}$ .*

Així doncs, suposem  $g = tf$  amb  $t \in \mathbb{T}$  i  $f \in O(2)$ . Sigui  $M$  la matriu ortogonal que representa  $f$  en la base canònica de  $\mathbb{E}^2$ , aleshores

$$g(x) = v + f_M(x) = v + Mx$$

per tot  $x \in \mathbb{E}^2$  i, per tant, podem pensar  $g$  com el parell ordenat  $(v, M)$  amb  $v \in \mathbb{E}^2$  i  $M \in O(2)$ . Podem definir la multiplicació d'aquests parells ordenats tal i com els hem definit en el producte semidirecte

$$(v, M)(v', M') = (v + f_M(v'), MM').$$

Ara, considerant els moviments com a parells ordenats  $(v, M)$ , podem reescriure els moviments definits anteriorment, alguns dels quals ja n'hem donat aquesta versió compacta.

- Les *translacions* per un vector  $v$  les podem denotar  $(v, I)$ .
- Les *rotacions* d'angle  $\theta$  al voltant de l'origen es poden escriure com  $(0, A)$  on

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

D'altra banda, les *rotacions* d'angle  $\theta$  al voltant d'un punt  $c$  com  $(c - f_A(c), A)$ . Això es dedueix del fet que s'envia un punt  $x$  a  $c + f_A(x - c)$  i

$$c + f_A(x - c) = c + f_A(x) - f_A(c) = (c - f_A(c)) + f_A(x)$$

tal i com volíem.

- Les *simetries* respecte una recta  $l$  que passa per l'origen són de la forma  $(0, B)$  on

$$B = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Altrament, les simetries respecte una recta  $m$  qualsevol són de la forma  $(2a, B)$  on  $a$  és el vector d'origen 0, direcció perpendicular a  $l$  que envia  $l$  a  $m$ . Anem a veure que, efectivament, són d'aquesta forma: per fer la reflexió respecte  $l$ , primer traslladem  $m$  pel vector  $-a$  per tal que passi per l'origen, fem la simetria respecte aquesta nova recta i tornem a traslladar-la a  $l$ . Per tant, un punt  $x$  es trasllada a  $x - a$ , després a  $f_B(x - a)$  i finalment a

$$a + f_B(x - a) = a + f_B(x) - f_B(a) = 2a + f_B(x)$$

on hem utilitzat que  $f_B(a) = -a$ .

- Les *simetries lliscants* són de la forma  $(2a + b, B)$  on  $f_B(b) = b$  amb  $b \neq 0$ .

## 2.3 Classificació de moviments del pla

Un cop definits els quatre tipus de moviments, redefinim un resultat que, tot i que es dedueix del teorema 2.1.6, en podem donar una demostració més elemental.

**Teorema 2.3.1** *Tot element de  $\mathbb{E}(2)$  és o bé una rotació al voltant de l'origen seguida d'una translació o bé una simetria respecte una recta per l'origen seguida per una translació.*

**Demostració 6** Suposem  $g \in \mathbb{E}(2)$  que envia l'origen 0 al punt  $a$ . Denotem per  $t$  la translació pel vector  $v = \overrightarrow{0a}$ . Sigui  $f = t^{-1}g$  un moviment que fixa l'origen. Volem veure que  $f$  és o una rotació respecte 0 o una simetria respecte una recta per l'origen.

Prenem  $p = (1, 0)$  i  $q = (0, 1)$  com a punts de referència. Aleshores, tot punt  $x \in \mathbb{E}^2$  queda totalment determinat per  $\|x\|$ ,  $\|x - p\|$  i  $\|x - q\|$  ja que les corresponents

circumferències s'intersequen en, com a molt, un punt. Per la mateixa raó, el punt  $f(x)$  queda determinat per la seva distància a  $f(0)$ ,  $f(p)$  i  $f(q)$ . Però com que  $f$  és un moviment, per ser composició de moviments, es compleix  $\|x\| = \|f(x)\|$ ,  $\|x - p\| = \|f(x) - f(p)\|$  i  $\|x - q\| = \|f(x) - f(q)\|$ .

Aleshores, coneixent les posicions de  $f(p)$  i  $f(q)$ , podem saber l'efecte de  $f$  en qualsevol punt del pla. Com que

$$\|p\| = \|f(p)\| = \|q\| = \|f(q)\| = 1 \quad \text{i} \quad \|p - q\| = \|f(p) - f(q)\| = \sqrt{2},$$

l'angle  $\widehat{f(p)0f(q)}$  és recte. Per tant, si fem la rotació d'angle  $\theta$  de  $p$  a  $f(p)$ , aleshores  $q$  rota a  $f(q)$  o a  $-f(q)$ . En el primer cas, tenim una rotació d'angle  $\theta$  al voltant de l'origen. En canvi, en el segon cas,  $f$  és una simetria respecte la recta que passa per l'origen i que té un angle de  $\theta/2$  respecte l'eix  $X$ .

Així doncs, qualsevol moviment  $g$  és una rotació o una simetria seguida d'una translació,  $g = tf$ , tal i com volíem veure.

□

En aquestes condicions, podem resumir l'anàlisi dels quatre tipus de moviments amb el següent enunciat.

**Corollari 2.3.2 (Classificació de moviments a  $\mathbb{E}^2$ )** *Si  $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$  un moviment.*

- 1) *Si  $f$  és un moviment directe, aleshores  $f$  és una translació o un gir.*
- 2) *Si  $f$  és un moviment invers, aleshores  $f$  és una simetria axial o una simetria axial lliscant.*

## 2.4 Generadors de $\mathbb{E}(2)$

L'objectiu d'aquesta secció és demostrar el que serà el teorema 2.4.4 sobre la descomposició de qualsevol moviment de  $\mathbb{E}(2)$  com a producte de simetries. Aquest el veurem al final d'aquesta secció i, fins a arribar-hi, veurem altres resultats que ens ajudaran en la seva demostració. Comencem, doncs, amb el cas de tenir, únicament, dues simetries.

### 2.4.1 Producte de dues simetries

Siguin  $s$  i  $s'$  dues simetries definides pels seus eixos de simetria  $l$  i  $l'$ , respectivament. Com que la simetria queda determinada pel seu eix, deduïm que  $s = s'$  si, i només si,  $l = l'$ . Aquest resulta ser el cas trivial. Suposem, doncs, que  $l \neq l'$  i distingim dos casos segons si les dues rectes es tallen o no.

**Proposició 2.4.1** *Donades dues simetries  $s$  i  $s'$  determinades per  $l$  i  $l'$  a  $\mathbb{E}^2$ , el seu producte  $ss'$  és una rotació o una translació segons si  $l$  i  $l'$  es tallen o no.*

- En cas que es tallin,  $l \cap l' = \{O\}$ , s'obté una rotació de centre  $O$  i d'angle  $\alpha$ , dues vegades el determinat per  $l$  i  $l'$ .
- En cas contrari, s'obté una translació de direcció perpendicular a les dues rectes i amb distància doble de la separació entre  $l$  i  $l'$ .

Com a conseqüència, tenim

**Proposició 2.4.2** *Qualsevol rotació o translació a  $\mathbb{E}^2$  és el producte de dues simetries  $s$  i  $s'$ . En particular:*

$$r(O, \phi) = s's, \quad t = s's,$$

que podem observar en les següents figures.

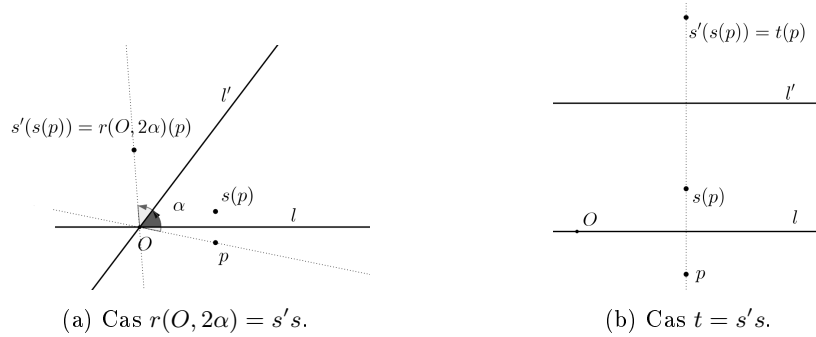


Figura 2.1: Producte de dues simetries.

### 2.4.2 Producte de tres simetries

Siguin  $s_1$ ,  $s_2$  i  $s_3$  tres simetries d'eixos  $l_1$ ,  $l_2$  i  $l_3$ , respectivament. El producte d'aquestes tres simetries admet molts casos ja que hi ha moltes possibilitats de distribució de  $l_1$ ,  $l_2$  i  $l_3$  a  $\mathbb{E}^2$ , però, recordant el teorema 2.4.1, podem reduir-ne l'estudi segons el número de punts d'intersecció  $n$  que pot ser 0, 1, 2 o 3.

**Proposició 2.4.3** *El producte de tres simetries de  $\mathbb{E}$  és o bé una simetria o bé una simetria amb lliscament segons el nombre de punts d'intersecció dels diferents eixos.*

### 2.4.3 Generalització

Una vegada hem vist el producte de dues i tres simetries, podem donar un resultat general per a la descomposició d'un moviment com a producte de simetries. L'enunciem a continuació.

**Teorema 2.4.4** *Qualsevol moviment de  $\mathbb{E}^2$  es pot descompondre com a producte de simetries axials. De fet amb tres n'hi ha prou.*

Aquest resultat es dedueix de tot l'anterior:

- Si el moviment és una translació o una rotació, hem vist que és producte de dues simetries;
- si el moviment és una simetria ja estem;
- si el moviment és una simetria amb lliscament, ja sabem que és de la forma  $t_v s$  on  $s$  simetria i  $t_v$  translació que és producte de dues simetries  $s'$  i  $s''$ . Per tant, la simetria amb lliscament ens queda descomposada com a producte de tres simetries,  $t_v s = (s'' s') s$ .

Així doncs, hem provat aquest teorema, tal i com volíem.



# Subgrups discrets del grup euclidià

L'objectiu a partir d'ara serà classificar els subgrups discrets del grup euclidià. Abans, però, cal saber què són els subgrups discrets en general i després veure'n propietats ja enfocades als subgrups de  $\mathbb{E}(2)$  que volem estudiar.

## 3.1 Què és un subgrup discret?

En primer lloc, definim el concepte *grup discret* ja que estaran en el punt de mira del nostre estudi.

**Definició 3.1.1** Un subgrup  $G$  del grup euclidià  $\mathbb{E}(2)$  rep el nom de *discret* si per tot punt  $p \in \mathbb{E}^2$  existeix un disc  $D$  de radi positiu i centrat en  $p$  que conté un nombre finit de punts de l'òrbita

$$T_p = \{g(p) \mid g \in G\}.$$

Així doncs, segons aquesta definició,  $T_p$  no té punts d'acumulació.

**Observació 6**  $\mathbb{E}(2)$  té una topologia i  $G \subseteq \mathbb{E}(2)$  hereta la topologia induïda. Per tant, des del punt de vista topològic, es diu que  $G$  és un *grup discret* si és discret per la seva mètrica, és a dir, si tot element  $g \in G$  està aïllat.

Anem a veure'n alguns exemples:

- Exemples 3.1.2**
- 1) El conjunt de punts generat per l'òrbita d'un punt  $p$  per les successives rotacions d'angle  $\pi/4$ .
  - 2) El conjunt  $\mathbb{Z} \times (a, b)$ , on  $(a, b)$  és un vector qualsevol de  $\mathbb{R}^2$ .
  - 3) El conjunt  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  generat per  $\mathbb{Z}(a, b) \times \mathbb{Z}(c, d)$ , on  $(a, b), (c, d)$  vectors qualssevol de  $\mathbb{R}^2$ .

## 3.2 Translacions d'un grup discret

Recordem que, donat  $\mathbb{E}(2)$  el *grup euclidià* de moviments del pla

$$\mathbb{E}(2) = \mathbb{T} \rtimes_{\alpha} O(2),$$

on  $\alpha : O(2) \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{T})$  ve donada per la conjugació. En altres paraules, podem dir que  $O(2)$  és un subgrup de  $\mathbb{E}(2)$  isomorf al grup obtingut en fer el quocient de  $\mathbb{E}(2)$  per  $\mathbb{T}$ :

$$O(2) \cong \mathbb{E}(2)/\mathbb{T}.$$

Així doncs, existeix un homomorfisme  $\pi : \mathbb{E}(2) \longrightarrow \mathbb{E}(2)/\mathbb{T}$  tal que  $\pi(g) = g\mathbb{T}$  per a tot  $g \in \mathbb{E}(2)$ , que és el que hem demostrat en el capítol anterior. El nucli d'aquest homomorfisme són totes les translacions.

A partir d'ara, intentarem reproduir la descomposició que hem fet de  $\mathbb{E}(2)$  per a un subgrup discret  $G$  del grup euclidià. En primer lloc, sobre  $G$  podem definir un subgrup que ens serà de molta utilitat d'aquí en endavant.

**Definició 3.2.1** Anomenem *subgrup de translació* de  $G$  al subgrup

$$T = G \cap \mathbb{T}.$$

**Proposició 3.2.2** *El subgrup  $T \subset G$  és un subgrup abelià i normal en  $G$ .*

Aquest subgrup serà clau per a la classificació dels subgrups discrets. El següent resultat en fa una primera distinció.

**Teorema 3.2.3 (Tricotomia)** *Sigui  $G$  un subgrup discret del grup euclidià, aleshores el seu subgrup de translació  $T = G \cap \mathbb{T}$  és trivial, cíclic infinit o abelià lliure de rang 2, és a dir,*

$$T \cong \mathbb{Z}^r, \quad \text{on } r \in \{0, 1, 2\}.$$

**Demostració 7** En el cas en que  $T$  és trivial, ja estem ja que aleshores tenim  $T \cong \{1\}$ .

Suposem, doncs,  $T$  no trivial. Com que  $T$  és discret, per ser subgrup d'un grup  $G$  discret, aleshores existeix  $a \in T \setminus \{1\}$  mínim, és a dir, tal que

$$d(O, a(O)) \leq d(O, t(O)), \quad \text{per a tot } t \in T \setminus \{1\}.$$

Així, la recta  $l$  que passa per  $O$  i  $a(O)$  també conté tots els punts de l'òrbita de  $O$  per l'acció del subgrup cíclic  $H = \langle a \rangle$ , és a dir, els punts de la forma  $a^n(O)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ara, si es compleix  $H = T$ , ja hem acabat ja que  $H \cong \mathbb{Z}$  i, per tant, també ho és  $T$ . Assumim, doncs,  $H < T$  i arribarem a contradicció.

Primer, anem a provar que no existeix cap  $t \in T \setminus H$  tal que  $t(O) \in l$ . Si suposem que sí que existeix, s'hauria de complir alguna de les dues condicions següents

a)  $t(O) = a^n(O)$ , per algun  $n \in \mathbb{Z}$ , o

b)  $t(O) \in [a^n(O), a^{n+1}(O)]$ .

En el primer cas,

$$t(O) = a^n(O) \implies a^n t^{-1}(O) = O \implies a^n t^{-1} = I$$

la qual cosa implica que  $t = a^n \in H$ , contradiant la tria que hem fet de  $t$ .

En el segon cas,

$$0 < d(O, a^{-n}t(O)) = d(a^n(O), t(O)) < d(a^n(O), a^{n+1}(O)) = d(O, a(O)),$$

contradiant la minimalitat de  $d(O, a(O))$ .

D'aquesta manera, hem vist que no existeix cap  $t \in T \setminus H$  tal que  $t(O) \in l$ .

Suposem, ara, que podem escollir una altra direcció de translació i anem a comprovar que, efectivament, es pot. En aquest cas, per discreció del subgrup, escollim  $b \in T \setminus \langle a \rangle$  tal que

$$d(O, b(O)) \leq d(O, t(O)), \quad \text{per tot } t \in T \setminus \langle a \rangle.$$

Utilitzant el mateix raonament que anteriorment, la recta  $l'$  que passa per  $O$  i  $b(O)$  conté tots els punts  $b^n(O)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , de l'òrbita de  $O$  sota l'acció del subgrup infinit cíclic  $\langle b \rangle = K < T$ .

Ara, com que  $l \cap l' = \{O\}$ , les successives rectes obtingudes per les translacions  $a$  i  $b$ ,  $a^m(l')$  i  $b^n(l)$  amb  $m, n \in \mathbb{Z}$ , parteixen el pla euclidià  $\mathbb{E}^2$  en paral·lelograms. Els vèrtexs d'aquests formen l'òrbita de  $O$  sota l'acció del subgrup de  $T$ ,  $H \times K$ . Així doncs, tenim  $H \times K \cong \mathbb{Z}^2$ . Si  $H \times K = T$ , ja hem acabat. Suposem, però, que això no passa, és a dir, que  $H \times K < T$  i arribarem a contradicció.

Prenem  $t \in T \setminus \{H \times K\}$ . Aleshores, el seu traslladat  $t(O)$  està a l'interior o a la vora d'un dels paral·lelograms de la partició del pla anterior. Suposem que els vèrtexs d'aquest paral·lelogram són

$$a^m b^n(O), \quad a^{m+1} b^n(O), \quad a^{m+1} b^{n+1}(O) \quad \text{i} \quad a^m b^{n+1}(O)$$

amb  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Podem traslladar  $t(O)$  a  $P = a^{-m} b^{-n} t(O)$ , que està a l'interior o a la vora del paral·lelogram “base”  $OAQB$ , on  $A = a(O)$ ,  $B = b(O)$ ,  $Q = ab(O)$ .

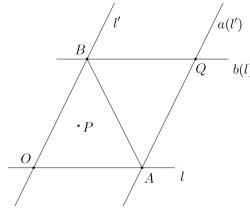


Figura 3.1: Punt  $P$  dins del paral·lelogram  $OAQB$ .

Com que  $a^{-m} b^{-n} t \notin H \times K$ ,  $P$  no pot ser ni  $A$  ni  $B$ . En el cas en què  $d(O, P) \leq d(Q, P)$ , representat en la figura 3.1, aleshores per propietats dels triangles  $d(O, P) < d(O, B)$ , entrant amb contradicció amb la minimalitat de  $b$ . Altrament, si  $d(O, P) \geq d(Q, P)$ , s'obté una contradicció semblant per la posició de  $a^{-1} b^{-1}(P)$ .

D'aquesta manera, hem provat que tenim tres possibilitats per  $T$

$$\{1\} \cong \mathbb{Z}^0, \quad \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}, \quad \langle a, b \rangle \cong \mathbb{Z}^2,$$

tal i com volíem.

□

# 4

## Grups finits i frisos

En aquest capítol, classifiquem els subgrups discrets  $G$  de  $\mathbb{E}(2)$  en els dos primers casos de la tricotomia vista en el capítol anterior, és a dir, els que tenen subgrup de translació trivial,  $T = \{1\}$ , i aquells que el tenen en una sola direcció,  $T \cong \mathbb{Z}$ .

### 4.1 Grups finits

Comencem, doncs, per aquells subgrups discrets  $G$  tal que  $T = \{1\}$ . En primer lloc, enunciem un teorema que ja s'ha provat en la demostració de la tricotomia (Teorema 3.2.3) però que no l'hem formulat com a tal.

**Teorema 4.1.1** *Sigui  $G \leq \mathbb{E}(2)$  tal que  $G \cap \mathbb{T} = \{1\}$ , aleshores existeix un punt  $O \in \mathbb{E}^2$  fixat per tot element  $g \in G$ .*

**Demostració 8** Suposem que el subgrup de translació de  $G$  és trivial. Això implica que  $G$  no conté ni translacions ni simetries lliscants i que, per tant, està format, a priori, per rotacions i simetries. Suposem que  $G$  no conté cap rotació, aleshores el grup ha de contenir almenys una simetria. En aquest cas,  $G$  és o bé el trivial o bé cíclic d'ordre 2.

Altrament,  $G$  sí que conté una rotació  $r$  no trivial, sigui  $r = r(O, \theta)$ . Anem a veure que, en aquest cas, cada element de  $G$  fixa  $O$ . Ho veiem per reducció a l'absurd: suposem que existeix  $g \in G$  tal que  $g(O) = O' \neq O$ . Aleshores,  $gs g^{-1} = s(O', \pm\theta)$ .

Així mateix, tenim  $grg^{-1}r^{\mp 1}$  és una translació. Això contradueix el fet que  $G$  no conté translacions de tal manera que no existeix cap element de  $G$  que “mogui” el punt  $O$ . En altres paraules,  $O$  queda fixat per tot element  $g \in G$ .

□

A partir d'aquí, ja podem seguir amb la classificació. Tal com hem vist també en la demostració de la tricotomia, en aquest cas  $G$  només conté simetries o rotacions. A més, recordant que tota rotació es pot obtenir com a composició de dues simetries,  $G \leq \text{Sym}(O)$ , on  $\text{Sym}(O)$  és el grup de simetries centrals respecte el punt  $O$ . Així doncs, tot element de  $G$  deixa fixat el punt  $O$  i, per tant, al ser  $G$  discret, és finit.

Finalment, sigui  $G$  subgrup finit de  $\mathbb{E}(2)$ , anem a veure que  $G$  és o bé cíclic, generat per un sol element, o bé diedral, amb dos generadors que seran una rotació i una simetria.

**Corol·lari 4.1.2 (Leonardo da Vinci)** *Tot subgrup finit de  $\mathbb{E}(2)$  és cíclic o diedral.*

**Demostració 9** Sigui  $G$  un subgrup finit de  $\mathbb{E}(2)$ . Necessàriament,  $G \cap \mathbb{T} = \{1\}$  ja que tota translació no trivial té ordre infinit. Pel teorema 4.1.1, tot element de  $G$  deixa fixat un punt  $O$ , és a dir,  $g(O) = O$  per tot  $g \in G$ .

Sigui  $G^+$  el subgrup de moviments directes de  $G$ , en aquest cas format només de rotacions al voltant de  $O$ . Si  $G^+ = \{1\}$ ,  $G$  només conté simetries i, per tant, és o bé el trivial o bé cíclic d'ordre 2, que denotarem  $C_2$ .

Altrament, d'entre totes les rotacions de  $G$  en podem escollir una,  $r = r(O, \theta)$ , d'angle positiu  $\theta$  mínim. Aleshores, podem escollir  $m \in \mathbb{N}$  mínim tal que  $m\theta \geq 2\pi$  i de tal manera que podem assegurar que  $m\theta < 2\pi + \theta$ . Per la minimalitat de  $\theta$ , tenim  $m\theta = 2\pi$  i, a més, assurem que  $G$  no conté cap rotació  $r' = r(O, \phi)$  tal que  $(n-1)\theta < \phi < n\theta$  per cap  $n \in \mathbb{N}$ . Així doncs, tota rotació de  $G$  s'obté a partir de  $r$  fent-ne les successives potències, és a dir,

$$G^+ = \langle r | r^m \rangle \cong C_m.$$

Acabem de provar, doncs, que si  $G$  no conté cap simetria, aleshores  $G = G^+ \cong C_m$  cíclic. En cas contrari,  $G$  conté simetries i rotacions. Sigui  $s \in G$  una simetria respecte la recta  $l$  que passa per  $O$ , ja hem vist que  $srs^{-1} = r(O, -\theta) = r^{-1}$ . En conseqüència, el grup  $G$  queda definit per

$$G = \langle r, s | r^m = 1, s^2 = 1, srs^{-1} = r^{-1} \rangle \cong \mathbb{D}_m.$$

D'aquesta manera, queda provat el corol·lari.

□

Amb això, finalitzem la classificació dels subgrups discrets del grup euclidià que no contenen translacions. Concloem, doncs, que per a aquests, només hi ha dues possibilitats: o bé cíclic o bé diedral.

## 4.2 Grups de frisos

Ens trobem ara amb els subgrups discrets del grup euclidià amb subgrup de translació  $T$  cíclic, és a dir, aquells grups de simetria de certes figures planes tal que només admeten una única direcció per les translacions. Sigui  $a \in \mathbb{E}$  l'únic vector de translació, aleshores el reticle en  $\mathbb{E}$  és de la forma  $a\mathbb{Z}$ .

**Definició 4.2.1** Les figures resultants d'aquests grups de simetria reben el nom de *frisos* i els corresponents grups, *grups de frisos*.

Denotarem  $F$  un grup de frisos i  $T = \langle t \mid \rangle$  el corresponent subgrup de translació, on  $t$  serà la translació segons un vector  $a$ ,  $t = t_a$ . A partir d'aquí començarem la classificació, que enunciem amb el següent teorema.

**Teorema 4.2.2** *Existeixen exactament set tipus de frisos diferents.*

La demostració és la classificació en sí dels grups de frisos que, d'entrada, diferenciarem segons si el grup conté rotacions o no.

#### 4.2.1 $F$ no conté cap rotació no trivial

Comencem amb aquells grups  $F$  que no contenen cap rotació no trivial de tal manera que només tenen translacions com a moviments directes. Amb això, volem dir que  $F^+ = T$ .

Suposem  $F = T$ . En aquest cas, obtenim el primer tipus de fris generat únicament per translacions.

$$F_1 = \langle t \mid \rangle. \quad (4.1)$$

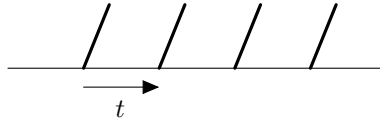


Figura 4.1: Grup  $F_1$ .

Altrament,  $F$  conté un moviment invers  $s$  que pot ser una simetria amb o sense lliscament. Pel teorema de classificació de moviments, tenim que  $F^- = sT$  de tal manera que  $F$  conté tants moviments directes com inversos,  $|F : T| = 2$ . A més, als preliminars ja hem vist que  $T \triangleleft F$ , és a dir,  $sts^{-1} = t^{\pm 1}$  on el signe  $+$  o  $-$  ve determinat, en termes geomètrics, per l'eix de la simetria. Sigui  $t = t_a$ , aleshores  $s(a) = a$  si  $s$  té eix paral·lel a  $a$  i  $s(a) = -a$  si  $s$  té eix perpendicular a  $a$ .

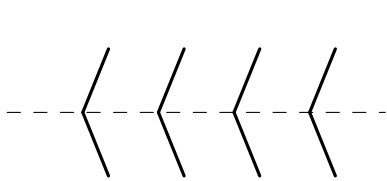
Denotarem les conjugacions  $sts^{-1}$  per  $t^s$  per simplificar el redactat i  $t^{-1}$  les translacions pel vector  $-t$ .

Ara sí, segons si  $s$  és una simetria amb o sense lliscament, distingim:

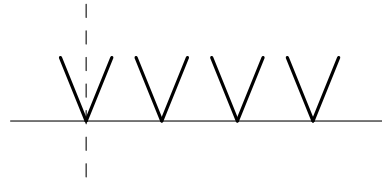
- Si  $s$  és una *simetria*, obtenim dos nous tipus de frisos,

$$F_1^1 = \langle t, s \mid s^2 = 1, t^s = t \rangle, \quad (4.2)$$

$$F_1^2 = \langle t, s \mid s^2 = 1, t^s = t^{-1} \rangle. \quad (4.3)$$



(a) Grup  $F_1^1$ .



(b) Grup  $F_1^2$ .

- Si  $s$  és una *simetria amb lliscament*, aleshores  $s^2$  és una translació no trivial, és a dir,  $r^2 = t^n$  per algun  $n \in \mathbb{Z}$  diferent de 0. Com que ja hem vist que  $sTs^{-1} = T$ , o el que és el mateix  $(st)^2 = 1$  per tot  $t \in T$ , aleshores  $s$  commuta amb  $t^m$  per tot  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $(t^m s)^2 = 1$ . Si ho desenvolupem:

$$(t^m s)^2 = t^{2m} r^2 = t^{2m} t^n = t^{2m+n} = 1.$$

El que volem, és poder simplificar aquesta expressió. Per fer-ho haurem d'aplicar canvis en els generadors del grup, mitjançant transformacions de Tietze; i canvis en les relacions corresponents. Aquest procés de simplificació l'anomenarem, d'ara en endavant, el *truc*. En aquest cas, ho farem escollint  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $2m+n$  sigui 0 o 1, canviant  $s$  per  $s' = t^m s$  i redenotant  $s'$  per  $s$ . Observem que  $s'$  també commuta amb  $t$ ,

$$s't = (t^m s)t = t^m ts = t^{m+1} s = st^{m+1} = stt^m = t(st^m) = t(t^m s) = ts';$$

i té quadrat trivial, cosa que no ens aporta cap grup nou, o  $t$ , amb el qual definim un nou tipus de fris,

$$F_1^3 = \langle t, s \mid s^2 = t, t^s = t \rangle. \quad (4.4)$$

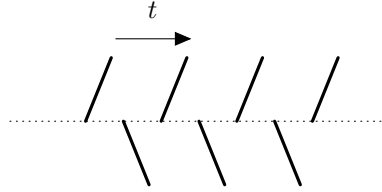


Figura 4.2: Grup  $F_1^3$ .

#### 4.2.2 $F$ conté una rotació no trivial

Sigui  $r \in F$  rotació no trivial,  $r \neq 1$ . En aquest cas, atès que  $T \triangleleft F$ , també es compleix  $rTr^{-1} = T$ , és a dir,  $t^r$  és generador de  $T$  de tal manera que  $t^r = t^{\pm 1}$ . Sigui  $t = t_a$ , aleshores això implicaria que  $a^s = \pm a$ . Com que  $r \neq 1$ , necessàriament escollim el signe menys. Així doncs,  $r$  és una rotació d'angle  $\pi$ , és a dir, d'ordre 2. Qualsevol altra rotació que poguem prendre,  $r' \in F$ , també té ordre dos i, per tant, la composició  $rr'$  és una translació. Així,  $r' \in rT$  i  $|F^+ : T| = 2$ . En el cas en què el grup només tingui moviments directes,  $F = F^+$ , tenim un cinquè tipus de fris,

$$F_2 = \langle t, r \mid r^2 = 1, t^r = t^{-1} \rangle. \quad (4.5)$$

El seu subgrup puntual és  $\{1, r\}$ , és a dir, només el trivial i la rotació deixen punts fixats.

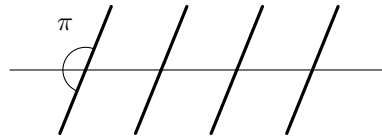


Figura 4.3: Grup  $F_2$ .



Altrament tenim  $F = F^+ \cup sF^+$ , on  $s$  és una simetria amb o sense lliscament. Sigui  $l$  l'eix de translació que passa pel centre  $O$  de la rotació i  $l'$  l'eix de simetria de  $s$ . També obtenim  $t^s = t^{\pm 1}$  i procedim igual que en el cas 4.2.1 deduint que  $l'$  és paral·lel o perpendicular a  $l$ . En el segon cas,  $t^{sr} = t$  on  $sr$  és un moviment invers amb eix paral·lel a  $l$ . Pel truc utilitzat en 4.2.1, podem prendre  $sr$  enlloc de  $r$  i podem assumir que  $l'$  és paral·lel a  $l$ . Anem a veure que, de fet,  $l = l'$ .

Suposem que  $l \neq l'$  de tal manera que  $s(O) \notin l$  i la composició  $r^s r = r(s(O), \pi)r(O, \pi)$  és una translació  $t'$  per la recta  $m$  que passa per  $O$  i  $s(O)$ . Com que  $l \cap m = \{O\}$ ,  $l$  i  $m$  no són paral·leles, per tant,  $t' \notin T$  i arribem a contradicció ja que no hi pot haver cap translació en una direcció diferent a la resta. Així doncs,  $l = l'$ .

- Si  $s$  és una simetria amb eix  $m$  perpendicular a  $l$  per  $O$ , obtenim un nou tipus de fris,

$$F_2^1 = \langle t, r, s \mid r^2 = 1, t^r = t^{-1}, s^2 = 1, t^s = t, (sr)^2 = 1 \rangle, \quad (4.6)$$

on  $sr$  és també una simetria.

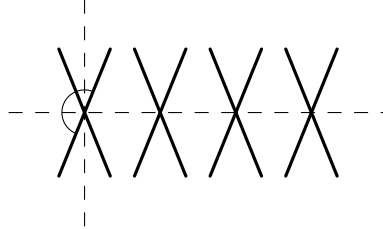


Figura 4.4: Grup  $F_2^1$ .

- Si  $s$  és una simetria amb lliscament, pel truc anterior podem assumir que  $s^2 = t$ . Sigui  $l$  l'eix de la simetria  $s$ ,  $A$  el traslladat  $t(O)$ ,  $M$  el punt mig del segment  $OA$  i  $M'$  el punt mig del segment  $OM$ . Siguin  $m$  i  $m'$  les rectes perpendiculars a  $l$  que passen per  $O$  i  $M'$ , respectivament. Aleshores, per la composició de simetries que hem vist als teoremes 2.4.1 i 2.4.4, es té

$$r = s(l)s(m), \quad s = s(m')s(m)s(l).$$

Ara, fent la composició  $sr$ , tenim

$$sr = s(m')s(m)s(l)s(l)s(m) = s(m'),$$

de tal manera que deduïm que  $(sr)^2 = 1$ . Així, obtenim l'últim tipus de fris,

$$F_2^2 = \langle t, r, s \mid r^2 = 1, t^r = t^{-1}, s^2 = t, t^s = t, (sr)^2 = 1 \rangle. \quad (4.7)$$

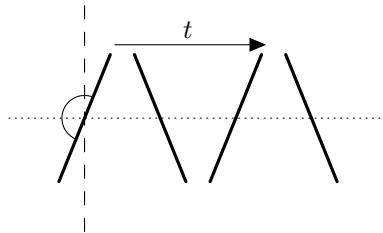


Figura 4.5: Grup  $F_2^2$ .

Podem resumir la classificació dels grups de frisos en la taula següent.

<b>Grup</b>	<b>Rotació <math>\pi</math></b>	<b>Sim. horitzontal</b>	<b>Sim. vertical</b>	<b>Sim. lliscant</b>
$F_1$	no	no	no	no
$F_1^1$	no	sí	no	no
$F_1^2$	no	no	sí	no
$F_1^3$	no	no	no	sí
$F_2$	sí	no	no	no
$F_2^1$	sí	sí	sí	no
$F_2^2$	sí	no	sí	sí

Taula 4.1: Classificació dels grups de frisos.

# 5

## Grups cristal·logràfics plans

Un cop classificats els subgrups discrets del pla euclidià en els dos primers casos de la tricotomia, en aquest capítol ens centrem en l'últim cas. Es tracta d'aquells grups discrets  $G$  tal que els seus respectius subgrups de translació estan generats per dues translacions: segons el vector  $a$  i el  $b$ .

Aquests subgrups discrets  $G$  tal que  $T = G \cap \mathbb{T} \cong \mathbb{Z}^2$  reben el nom de *grups cristal·logràfics del pla*. N'hi ha exactament 17 i els anirem descobrint al llarg d'aquest capítol. Aquest resulta ser el motiu central d'estudi d'aquest treball.

Per entendre cadascun dels grups  $G$ , hem de veure com construïm  $G$  a partir de dos subgrups seus: el subgrup de translació  $T$ , que ja hem definit, i el subgrup puntual, que definirem a continuació i que veurem que és isomorf a  $G/T$ .

### 5.1 Grup puntual

Sigui  $G$  un grup cristal·logràfic amb subgrup de translació  $T$ . Segons el quocient  $G/T$ , determinarem tots els possibles grups  $G$ . Recordem que un moviment del pla el denotem per  $(v, M)$  on  $v \in T$  i  $M \in O(2)$ . En particular, una translació per un vector  $v$  és  $(v, I)$  mentre que una transformació ortogonal, ja sigui una rotació o una simetria, és de la forma  $(0, A)$ . En aquestes condicions, podem definir el grup puntual de la següent manera.

**Definició 5.1.1** Sigui  $G$  un grup cristal·logràfic. El *grup puntual*  $G_0$  de  $G$  és el conjunt

$$G_0 = \{A \in O(2) \mid (b, A) \in G \text{ per algun } b \in \mathbb{E}^2\} \subset O(2).$$

Segons la definició, podem fer aquesta interpretació del grup puntual,

**Proposició 5.1.2** Si  $G$  és un grup cristal·logràfic amb subgrup de translació  $T$  i grup puntual  $G_0$ , aleshores

$$G_0 \cong G/T.$$

**Demostració 10** Ja hem vist a la secció 3.2 que existeix un homomorfisme  $\pi : \mathbb{E}(2) \longrightarrow \mathbb{E}(2)/\mathbb{T}$  tal que  $\pi(g) = g\mathbb{T}$  per a tot  $g \in \mathbb{E}(2)$ . Aquest homomorfisme també es pot veure com l'aplicació que envia  $(v, M)$  a  $M$  de tal manera que  $\pi(G) = G_0$ .

Aleshores, el nucli de  $\pi|_G$  és  $T$  ja que  $T$  és la intersecció  $G \cap \mathbb{T}$  i  $\mathbb{T}$  és el nucli de  $\pi$ . Aleshores, pel primer teorema d'isomorfisme arribem al resultat que volíem

$$G_0 \cong G/T.$$

□

### 5.1.1 Acció de $G_0$ sobre $T$

Un cop definit el subgrup puntual, ens interessa veure com actua sobre el subgrup de translació  $T$ . Observem que el grup  $O(2)$  actua sobre el grup  $\mathbb{T}$  per conjugació, és a dir, sigui  $(v, I) \in \mathbb{T}$  i  $(0, A) \in O(2)$ , aleshores

$$(0, A)(v, I)(0, A)^{-1} = (0, A)(v, A^{-1}) = (A(v), I).$$

Aquesta acció es pot restringir a aquella de  $G_0$  sobre  $T$ , de tal manera que, donats  $A \in G_0$  i  $(v, I) \in T$ , existeix  $b \in \mathbb{E}^2$  tal que  $(b, A) \in G$  i es compleix

$$\begin{aligned} (b, A)(v, I)(b, A)^{-1} &= (b, A)(v, I)(-A^{-1}b, A^{-1}) \\ &= (b, A)(v - A^{-1}b, A^{-1}) \\ &= (A(v), I) \in G. \end{aligned}$$

Així doncs,  $(A(v), I) \in T$ . Aquesta acció juntament amb l'estructura de  $T$  ens facilitaran la classificació. Ens cal encara un lema previ sobre el grup puntual.

**Proposició 5.1.3** *El grup puntual  $G_0$  de  $G$  és finit.*

**Demostració 11** Sigui  $\{a, b\}$  una base de  $T$  i sigui  $C$  un cercle centrat a l'origen que conté  $a$  i  $b$  al seu interior. Com que  $T$  és discret, hi ha un nombre finit d'elements de  $T$  dins de  $C$ . Com que  $G_0$  és un subgrup de  $O(2)$ , els seus elements es restringeixen a les permutacions dins de  $C$ . Aleshores, hi ha un nombre finit d'elements de  $T$  obtinguts per l'acció d'algun element de  $G_0$  sobre  $\{a, b\}$ . Al ser  $\{a, b\}$  base de  $\mathbb{E}^2$ , qualsevol element de  $G_0$  ve determinat per la seva acció sobre  $\{a, b\}$  de tal manera que  $G_0$  és finit.

□

Amb la demostració d'aquesta proposició, es pot redefinir el concepte de grup cristal·logràfic.

**Definició 5.1.4** Diem que un subgrup  $G$  de  $\mathbb{E}(2)$  és un *grup cristal·logràfic* si el seu subgrup de translació  $T$  està generat per dues translacions independents i el seu subgrup puntual  $G_0$  és finit.

I així, com que en aquest capítol ens restringim als grups  $G$  amb subgrup de translació  $T \cong \mathbb{Z}^2$ , es poden classificar tots els grups cristal·logràfics sabent-ne els diferents subgrups puntuals. El teorema següent ens indica quins subgrups puntuals es podran prendre.

**Teorema 5.1.5** *Sigui  $G_0$  el grup puntual d'un grup cristal·logràfic  $G$ . Aleshores,  $G_0$  és isomorf a algun dels següents grups*

$$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, \mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_3, \mathbb{D}_4, \mathbb{D}_6\},$$

on  $C_n$  és el grup cíclic d'ordre  $n$  i  $\mathbb{D}_n$  és el grup diedral d'ordre  $2n$ .

**Observació 7** La restricció de  $n$  a 1, 2, 3, 4 i 6 és l'anomenada *restricció cristal·logràfica*.

**Demostració 12** Pel lema anterior sabem que  $G_0$  és finit. En conseqüència, atès que pel corol·lari 4.1.2 sabem que tot subgrup finit de  $\mathbb{E}(2)$  és cíclic o diedral, aleshores  $G_0$  és isomorf a  $C_n$  o a  $\mathbb{D}_n$ , per alguna  $n$ .

Sigui  $SO(2)$  el grup de matrius ortogonals de determinant 1, definim el subgrup cíclic  $N = G_0 \cap SO(2)$  generat per la rotació  $r$  d'angle mínim  $\theta$ . A més,  $|N| = n$  de tal manera que  $r$  té ordre  $n$ . Determinem la rotació d'angle  $\theta$  mitjançant dues matrius. D'una banda, la matriu que hem definit en capítols anteriors

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

D'altra banda, sigui  $\{a, b\}$  la base de  $T$ , com que  $r(T) = T$  i  $T = a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z}$ , podem expressar la rotació com

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},$$

amb  $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$ . Com que aquestes dues matrius representen el mateix moviment lineal però en bases diferents, han de ser conjugades, és a dir, han de tenir la mateixa traça. Amb això, obtenim la següent igualtat

$$2 \cos \theta = x + w \in \mathbb{Z},$$

de tal manera que  $\theta$  o  $-\theta$  ha de ser de  $\{0, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, \pi\}$ . Així doncs,  $N = \langle r \rangle$  té ordre  $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ . Com que  $G_0$  és isomorf a  $C_n$  o a  $\mathbb{D}_n$  per  $n = |N|$ , ja hem provat la restricció cristal·logràfica tal i com volíem.

□

Tal com hem dit a l'inici d'aquest capítol, per descriure cada grup cristal·logràfic  $G$ , hem d'entendre com els construïm a partir de  $T$  i  $G_0$ . En altres paraules, un grup cristal·logràfic conté un subgrup abelià normal  $T$  de translacions i  $G/T$  és un grup finit isomorf al subgrup puntual  $G_0$  de tal manera que, suposant que el lector té coneixements en Topologia Algebraica, podem considerar la successió exacta de grups

$$1 \longrightarrow T \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} G_0 \longrightarrow 1,$$

on  $\iota$  és la inclusió i  $\pi$  l'aplicació pas al quocient. Aquesta successió és una extensió de grups de  $T$  per  $G_0$ . Aleshores, suposant que  $T$  és un  $G_0$ -mòdul, tenim un homomorfisme de grups  $\varphi : G_0 \longrightarrow \text{Aut}(T)$  i podem definir el producte semidirecte  $T \rtimes_{\varphi} G_0$  de tal manera que obtenim l'extensió de grups

$$1 \longrightarrow T \longrightarrow T \rtimes_{\varphi} G_0 \longrightarrow G_0 \longrightarrow 1.$$

En aquest cas, els grups  $G$  isomorfs a  $T \rtimes_{\varphi} G_0$  s'anomenen grups *escindits* (en anglès, *split groups*) ja que la successió exacta es diu que escindeix.

**Proposició 5.1.6** *Siguin  $G$  i  $G'$  dos grups cristal·logràfics isomorfs. Aleshores els seus subgrups puntuals i de translació també són isomorfs, és a dir,*

$$G \cong G' \implies G_0 \cong G'_0, \quad T \cong T'.$$

**Demostració 13** Sigui  $f : G \longrightarrow G'$  un isomorfisme. Sigui  $T$  i  $T'$  els subgrups de translació de  $G$  i  $G'$ , respectivament, hem de veure que l'isomorfisme  $f$  envia translacions a translacions, és a dir, que  $f(T) = (T')$ .

Observem que les translacions i les simetries lliscants tenen ordre infinit mentre que les rotacions i les simetries tenen ordre finit. Així, sigui  $t \in T$  d'ordre infinit, aleshores  $f(t)$  és o bé una translació o bé una simetria lliscant. Suposem que és una simetria amb lliscament i escollim  $t' \in T'$  que no commuta amb  $f(t)$  (de fet, qualsevol translació amb direcció no paral·lela a la recta de lliscament, no commutarà amb aquesta simetria lliscant). Així doncs, si  $f(g) = t'$ , aleshores  $g$  ha de ser una translació o una simetria lliscant i  $g^2$  és una translació. Aleshores  $g^2$  commuta amb  $t$  contradient el fet que  $f(g^2) = (t')^2$  no commuta amb  $f(t)$ . D'aquesta manera deduïm que els isomorfismes envien translacions a translacions i, per tant,  $T \cong T'$ .

Amb això,  $f$  indueix un isomorfisme entre  $G/T$  i  $G'/T'$ . Com que aquests dos grups són isomorfs a  $G_0$  i  $G'_0$ , respectivament, aleshores els subgrups puntuals  $G_0$  i  $G'_0$  són isomorfs entre sí.

□

En termes de successions exactes, el resultat anterior s'interpreta de la forma següent: un morfisme de grups cristal·logràfics  $f : G \longrightarrow G'$  indueix un morfisme de successions exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & T & \xrightarrow{\iota} & G & \xrightarrow{\pi} & G_0 & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow f_T & & \downarrow f & & \downarrow f_0 & & \\ 1 & \longrightarrow & T' & \xrightarrow{\iota'} & G' & \xrightarrow{\pi'} & G'_0 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Si  $f$  és un isomorfisme, aleshores també ho és  $f_T$  i, en conseqüència,  $f_0$ .

Ara bé, donats dos grups cristal·logràfics  $G$  i  $G'$  i isomorfismes

$$f_T : T \longrightarrow T', \quad f_0 : G_0 \longrightarrow G'_0,$$

no podem assegurar que  $G$  i  $G'$  siguin isomorfs. La raó es troba en què els isomorfismes  $f_T$  i  $f_0$  no tenen per què provenir d'un morfisme de  $G$  en  $G'$ . En altres paraules, no sempre es podrà completar el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & T & \xrightarrow{\iota} & G & \xrightarrow{\pi} & G_0 & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow f_T & & \downarrow & & \downarrow f_0 & & \\ 1 & \longrightarrow & T' & \xrightarrow{\iota'} & G' & \xrightarrow{\pi'} & G'_0 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

## 5.2 Classificació dels grups cristal·logràfics

En primer lloc, el que cal fer és definir el concepte de *reticle* ja que la classificació dels grups es farà a partir d'aquest. Sigui  $G$  el subgrup discret amb subgrup de translació  $T = \langle a, b \rangle \cong \mathbb{Z}^2$ , aleshores

**Definició 5.2.1** L'òrbita de l'origen per l'acció del subgrup  $T$  forma un conjunt  $L$  que rep el nom de *reticle* estès per  $a$  i  $b$ , és a dir, el reticle consta de totes les combinacions lineals  $ma + nb$ , amb  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

Podem classificar els reticles en cinc tipus diferents i rebran el nom segons la forma del paral·lelogram base definit per  $a, b \in T$ . Anomenem tot seguit els cinc tipus de reticles i més endavant els veurem en detall per separat.

- (i) *Oblic*, ha de complir  $\|a\| < \|b\| < \|a - b\| < \|a + b\|$ .
- (ii) *Quadrat*, ha de complir  $\|a\| = \|b\| < \|a - b\| = \|a + b\|$ .
- (iii) *Hexagonal*, ha de complir  $\|a\| = \|b\| = \|a + b\| < \|a - b\|$ .
- (iv) *Rectangular*, ha de complir  $\|a\| < \|b\| < \|a - b\| = \|a + b\|$ .
- (v) *Rombal*, ha de complir  $\|a\| < \|b\| = \|a - b\| < \|a + b\|$ .

A més, el següent resultat prova que el grup puntual actua sobre el reticle deixant-lo invariant, és a dir, envia punts del reticle al mateix reticle.

**Teorema 5.2.2** *El grup puntual  $G_0$  actua sobre el reticle  $L$ .*

**Demostració 14** Sigui  $G$  un grup discret. El grup puntual, com a subgrup de  $O(2)$ , actua sobre el pla de la forma usual. Sigui  $M \in G_0$  i  $x \in L$ , cal veure que  $f_M(x)$  també pertany al reticle  $L$ . Sigui  $g = (v, M)$  un moviment qualsevol i  $t = (x, I)$  la translació pel vector  $x$ . Ja sabem que  $T$  és un subgrup normal de  $G$ , de tal manera que  $gtg^{-1} \in T$ . A més, però,

$$\begin{aligned} gtg^{-1} &= (v, M)(x, I)(-f_M(v), M^{-1}) \\ &= (v, M)(x - f_M^{-1}(v), M^{-1}) \\ &= (v + f_M(x - f_M^{-1}(v)), MM^{-1}) \\ &= (v + f_M(x) - v, I) \\ &= (f_M(x), I), \end{aligned}$$

és a dir,  $f_M(x)$  també és un punt del reticle tal i com volíem.

□

Per últim, enunciem dos resultats previs a la classificació que no demostrarem perquè, de fet, només els usarem per contextualitzar quines de les extensions són escindides.

**Proposició 5.2.3** *Sigui  $G$  un grup cristal·logràfic amb subgrup puntual  $C_n$ , per algun  $n$ . Aleshores  $G$  és isomorf a un grup escindit.*

**Corol·lari 5.2.4** *Sigui  $G$  un grup cristal·logràfic amb subgrup puntual  $\mathbb{D}_n$  i sigui  $\varphi : G \rightarrow G_0 = \mathbb{D}_n$  l'homomorfisme canònic. Aleshores  $\varphi^{-1}(C_n)$  és un grup escindit. A més, si  $f \in \mathbb{D}_n \setminus C_n$  amb  $(t_f, f) \in G$ , aleshores  $G$  està generat per  $\varphi^{-1}(C_n)$  i  $(t_f, f)$ .*

Amb aquestes últimes consideracions, podem classificar els 17 grups cristal·logràfics: en primera instància, segons el seu reticle i, després, depenent del seu subgrup puntual. Observem, però, que hi haurà 13 possibles subgrups puntuals per 17 grups cristal·logràfics. Això és a causa del fet que no tots els grups  $G$  són escindits.

De cada un dels grups, en deduirem la seva presentació, en veurem un esquema senzill del seu motiu base, delimitat per paral·lelogram definit pels vectors  $a$  i  $b$ , i en donarem un exemple d'aplicació a la realitat. Molts d'aquests exemples s'han tret del llibre *The Grammar of Ornament* ([9]) en versió digital.

**Nota 2** En les representacions esquemàtiques de cada grup, simbolitzarem

- el centre d'una rotació d'angle  $\pi$ ,  $\pi/2$ ,  $2\pi/3$  i  $\pi/3$  per ●, ■, ▲ i ×, respectivament;
- l'eix d'una simetria per una línia discontinua i l'eix d'una simetria amb lliscament per una línia de punts.

### 5.2.1 Reticle oblic

Sigui  $\{a, b\}$  una base de  $T$ , aleshores, tal i com hem vist en la demostració del teorema 3.2.3, podem prendre el subgrup de translació del grup  $G$  com  $T = \langle a, b \rangle$ , on  $a \in T \setminus \{1\}$  i  $b \in T \setminus \langle a \rangle$ , ambdós de mínima longitud. Els únics subgrups puntuals que preserven el reticle són el trivial i el que conté una rotació d'angle  $\pi$ , és a dir, els isomorfs als cíclics  $C_1$  i  $C_2$ . Segons això, distingirem dos grups cristal·logràfics.

Sigui  $G_0 = C_1$ , tenim

$$C_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

és a dir, el subgrup puntual és trivial. Es tracta, doncs, del primer grup cristal·logràfic que conté, únicament, translacions en les direccions de  $a$  i  $b$ . La seva presentació és

$$G_1 = \langle a, b \mid ab = ba \rangle. \quad (5.1)$$

En efecte, és un grup escindit tal que  $G_1 = T$ .

A continuació, en veiem una figura esquemàtica i un exemple de la realitat.



Figura 5.1: Grup  $G_1$ . Estampat medieval.

Sigui, ara,  $G_0 = C_2$ . Això ens indica que el grup amb aquest subgrup puntual té una rotació no trivial  $r$  d'angle  $\pi$  i, per tant,

$$C_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle r \rangle.$$



Aquest actua sobre  $T$  de tal manera que es compleix

$$a^r = rar^{-1} = a^{-1} \quad \text{i} \quad b^r = rbr^{-1} = b^{-1},$$

és a dir, rotem  $a$  i  $b$  un angle de  $\pi$  fins a  $b$  i  $-a$ , respectivament. Amb això, definim el segon grup cristal·logràfic.

$$G_2 = \langle a, b, r \mid ab = ba, r^2 = 1, a^r = a^{-1}, b^r = b^{-1} \rangle. \quad (5.2)$$

Es representa de la següent manera.

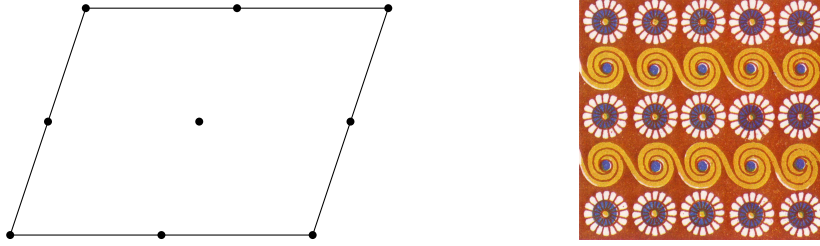


Figura 5.2: Grup  $G_2$ . Estampat egipci.

Aquests són els dos únics grups que s'obtenen amb el reticle oblic. A partir d'aquí, considerem els grups  $C_n$  i  $\mathbb{D}_n$  per  $n \geq 3$ . Considerem el següent lema per fer una elecció convenient d'una base de  $T$  a partir de  $\{a, b\}$ .

**Lema 5.2.5** *Suposem que  $G_0$  conté una rotació  $r$  d'angle  $\frac{2\pi}{n}$  per  $n \geq 3$ . Sigui  $t \in T$  no nul, de mínima longitud, aleshores  $\{t, r(t)\}$  és una base de  $T$ .*

**Demostració 15** Sigui  $\{a, b\}$  una base de  $T$ . Aleshores, podem considerar

$$\begin{aligned} t &= xa + yb \\ r(t) &= za + wb, \end{aligned}$$

per certs enters  $x, y, z, w$ . Els vectors  $t$  i  $r(t)$  són linealment independents perquè  $n > 2$  de tal manera que podem escriure  $a = \alpha t + \beta r(t)$  per alguns  $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ . Siguin  $\alpha = \alpha_0 + \epsilon$  i  $\beta = \beta_0 + \epsilon'$ , per  $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{Z}$  i  $|\epsilon|, |\epsilon'| \leq 1/2$ . Tenim, doncs,  $s = \alpha_0 t + \beta_0 r(t) \in T$  de tal manera que  $a - s = \epsilon t + \epsilon' r(t) \in T$ . Com que  $t$  i  $r(t)$  no són paral·lels, ens queda

$$\begin{aligned} \|a - s\| &= \|\epsilon t + \epsilon' r(t)\| < \|\epsilon t\| + \|\epsilon' r(t)\| \\ &< \frac{1}{2}(\|t\| + \|r(t)\|) = \|t\|, \end{aligned}$$

ja que  $\|t\| = \|r(t)\|$ . Això contradiu la minimalitat de  $\|t\|$  a no ser que  $s = a$ . Així doncs,  $a = s$  és una combinació lineal amb coeficients enters de  $t$  i  $r(t)$ . De forma equivalent,  $b$  és combinació lineal de  $t$  i  $r(t)$ . Com que  $\{a, b\}$  és una base de  $T$ , aleshores  $\{t, r(t)\}$  també és una base de  $T$ , tal i com volíem provar.

□

### 5.2.2 Reticle quadrat

Pel reticle quadrat, considerem  $r$  una rotació d'angle  $\pi/2$ . Pel lema 5.2.5, sigui  $a$  un vector de  $T$  de longitud mínima, aleshores  $\{a, r(a)\}$  és una altra base de  $T$ , és a dir, dos vectors perpendiculars de la mateixa longitud. Tal i com indica el seu nom, el reticle obtingut ve definit per quadrats. Denotarem  $r(a) = b$ .

En aquest cas, els subgrups puntuals són isomorfs o bé a  $C_4$  o bé a  $\mathbb{D}_4$  ja que són les transformacions ortogonals que preserven el reticle. Amb això, obtindrem tres grups cristal·logràfics diferents.

En primer lloc, sigui  $G_0 = C_4$  generat per  $r$  de tal manera que

$$C_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle r \rangle.$$

L'acció de  $G_0$  sobre  $T$  és tal que

$$a^r = b \quad \text{i} \quad b^r = a^{-1},$$

és a dir, rota els generadors de  $T$  en un angle de  $\pi/2$ . Ho justifiquem tot seguit.

Tal i com hem vist a l'apartat 5.1.1, l'acció per conjugació de  $(0, A) \in G_0$  sobre  $(v, I) \in T$  és tal que s'obté  $(A(v), I)$ . Ens limitem, doncs, a veure detalladament l'acció de  $r$  sobre els vectors  $a$  i  $b$  calculant  $A(a)$  i  $A(b)$ .

$$\begin{aligned} A(a) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b, \\ A(b) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -a. \end{aligned}$$

Així doncs, considerem el següent grup cristal·logràfic definit per les translacions  $a$  i  $b$  i una rotació  $r$  de  $\pi/2$ ,

$$G_4 = \langle a, b, r \mid ab = ba, r^4 = 1, a^r = b, b^r = a^{-1} \rangle. \quad (5.3)$$

Es pot representar de la següent forma i en veiem un exemple real.

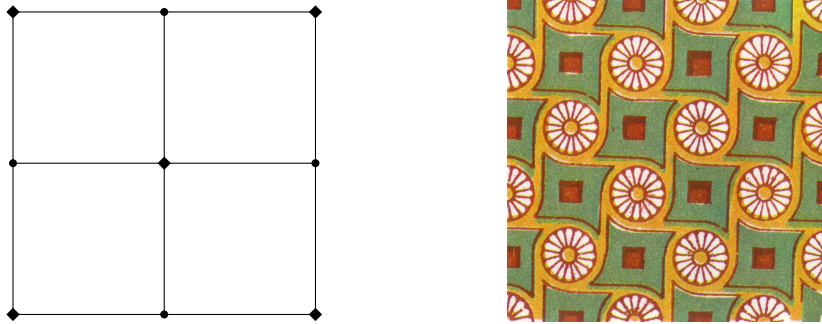
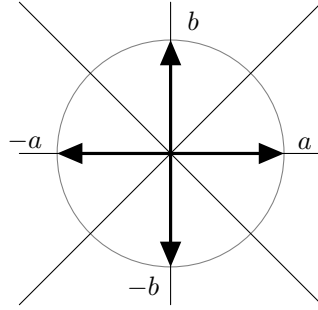


Figura 5.3: Grup  $G_4$ . Estampat egipci.

Sigui ara  $G_0 = \mathbb{D}_4$ , aleshores ja comencen a aparèixer moviments inversos. Considerem una simetria  $s$ , aleshores  $s$ ,  $rs$ ,  $r^2s$  i  $r^3s$  són simetries de  $G_0$ . A més, podem escriure una presentació del grup diedral generat per  $s$  i la rotació  $r$  ja que ja hem vist que el producte d'una rotació i una simetria és una simetria.

$$\mathbb{D}_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle r, s \rangle.$$

Amb això, obtenim dos nous grups cristal·logràfics de reticle quadrat, els quals tenen quatre eixos de simetria tal i com veiem a la figura següent.



D'una banda, un primer grup és

$$G_4^1 = \langle a, b, r, s \mid ab = ba, r^4 = 1, a^r = b, b^r = a^{-1}, s^2 = 1, a^s = a, b^s = b^{-1}, (rs)^2 = 1 \rangle, \quad (5.4)$$

generat per una rotació de  $\pi/2$  i dues simetries  $s$ , amb eix de simetria paral·lel a  $a$ , i  $rs$ , amb eix que forma un angle de  $\pi/4$  amb l'eix de  $s$  (per composició d'una rotació amb una simetria). L'acció de  $r$  sobre  $T$  és la mateixa que en el cas anterior, per tant, les relacions corresponents coincideixen. D'altra banda, l'acció de  $s$  sobre  $T$  defineix les altres relacions

$$a^s = a \quad \text{i} \quad b^s = b^{-1},$$

que indiquen que la translació pel vector  $a$  queda invariant al ser  $s$  d'eix paral·lel a aquest, mentre que la translació pel vector  $b$  s'inverteix al ser l'eix perpendicular a aquest. En forma matricial, podem justificar les relacions depenents de  $s$  de la següent manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

A continuació, veiem un esbós del quadrat base i en veiem una aplicació a la realitat.

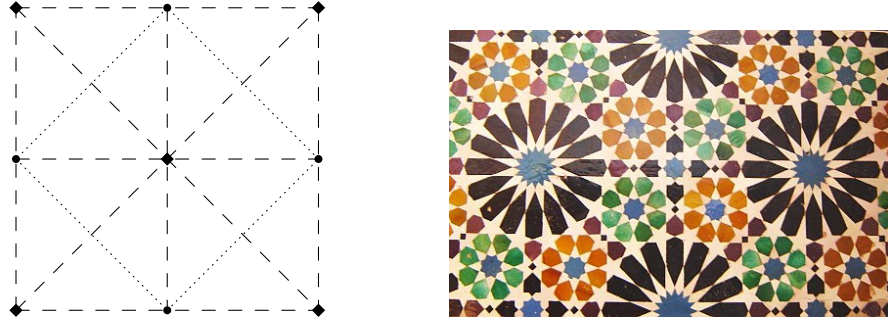


Figura 5.4: Grup  $G_4^1$ . Estampat àrab a l'Alhambra de Granada.

D'altra banda, considerem, ara,  $s$  simetria amb lliscament segons el vector  $a/2$ . Amb aquesta, obtenim

$$G_4^2 = \langle a, b, r, s \mid ab = ba, r^4 = 1, a^r = b, b^r = a^{-1}, s^2 = a, a^s = a, b^s = b^{-1}, (rs)^2 = 1 \rangle, \quad (5.5)$$

el qual esquematitzem tot seguit.

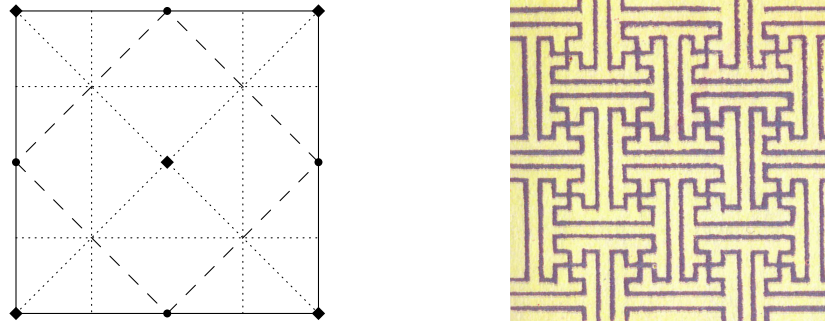


Figura 5.5: Grup  $G_4^2$ . Estampat xines.

### 5.2.3 Reticle hexagonal

Sigui  $r$  una rotació d'angle  $2\pi/3$ , pel lema 5.2.5 considerem  $\{a, r(a)\}$  una base de  $T$ . Amb el reticle definit per aquests dos vectors, considerem els subgrups puntuals isomorfs als grups  $C_3$ ,  $\mathbb{D}_3$ ,  $C_6$  i  $\mathbb{D}_6$ , que el deixen invariant.

En primer lloc, considerem el subgrup puntual  $G_0$  isomorf a  $C_3$ . Aquest està generat per la rotació  $r$  i té presentació

$$C_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle r \rangle,$$

on la matriu de rotació està escrita en la nova base  $\{a, b\}$ . Els vectors de mínima longitud en aquest cas i en el següent són

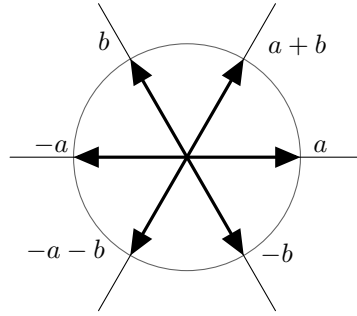


Figura 5.6: Vectors de mínima longitud.

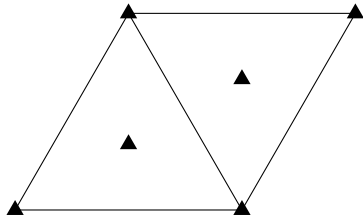
Amb el reticle de base  $\{a, b\}$  i subgrup puntual anterior, apareix un nou grup cristal·logràfic generat, únicament, per les translacions  $a$  i  $b$  i per la rotació  $r$ . La presentació d'aquest nou grup és

$$G_3 = \langle a, b, r \mid ab = ba, r^3 = 1, a^r = b, b^r = (ab)^{-1} \rangle, \quad (5.6)$$

on les dues últimes relacions les obtenim a l'estudiar l'acció de  $G_0$  sobre  $T$ . Veiem-ho en detall:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

A continuació, representem de forma esquemàtica el generador geomètric del grup i en veiem un exemple de la realitat.

Figura 5.7: Grup  $G_3$ . Estampat àrab a l'Alhambra de Granada.

Sigui, ara,  $G_0$  isomorf a  $C_6$ , generat per una sola rotació  $r'$  d'angle  $\pi/3$ , és a dir, en la base  $\{a, b\}$

$$C_6 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle r' \rangle.$$

Amb aquest subgrup, obtenim un grup generat per les translacions  $a$  i  $b$  i per la rotació  $r'$ .

$$G_6 = \langle a, b, r' \mid ab = ba, (r')^6 = 1, a^{r'} = ab, b^{r'} = a^{-1} \rangle, \quad (5.7)$$

on les dues últimes relacions les obtenim a l'estudiar l'acció de  $G_0$  sobre  $T$ . Veiem-ho en detall:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Representem el grup de forma esquemàtica i en veiem una aplicació real.

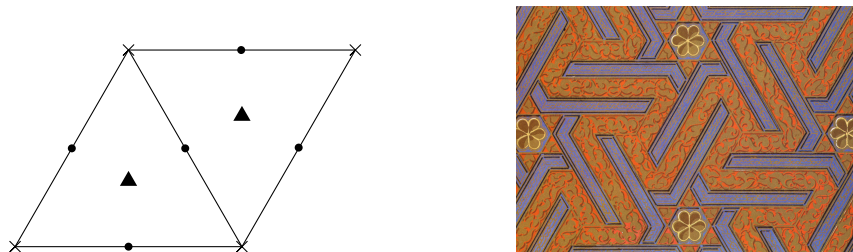


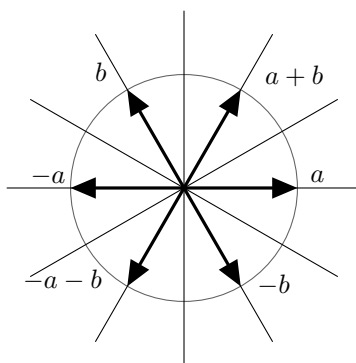
Figura 5.8: Grup  $G_6$ . Estampat àrab a l'Alhambra de Granada.

Afegim, ara, moviments inversos de tal manera que  $G_0$  és isomorf a  $\mathbb{D}_3$  o a  $\mathbb{D}_6$ .

Comencem pel segon cas, en el qual el subgrup puntual està generat per  $r$  i una simetria  $s$ . En la base  $\{a, b\}$ , tenim

$$\mathbb{D}_6 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle r, s \rangle,$$

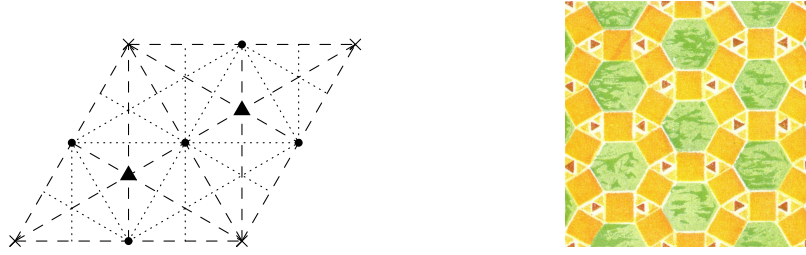
i, per tant, disposa de 6 eixos de les simetries  $s, rs, r^2s, r^3s, r^4s$  i  $r^5s$  tal i com podem veure en la figura següent:



D'aquesta manera, obtenim un nou grup cristal·logràfic generat per les translacions  $a$  i  $b$ , per la rotació  $r'$  i per les simetries  $s$ , d'eix paral·lel al vector  $a$ , i  $rs$ , que forma un angle de  $\pi/6$  amb l'eix anterior. La seva presentació és, doncs

$$G_6^1 = \langle a, b, r' \mid ab = ba, (r')^6 = 1, a^{r'} = ab, b^{r'} = a^{-1}, s^2 = 1, a^s = a, b^s = (ab)^{-1}, (rs)^2 = 1 \rangle. \quad (5.8)$$

Anem a veure una representació esquemàtica i un exemple real del grup.

Figura 5.9: Grup  $G_6^1$ . Estampat bizantí.

Finalment, si  $G_0$  és isomorf a  $\mathbb{D}_3$ , aleshores conté tres simetries amb eixos separats per un angle de  $\pi/3$ , que són  $s$ ,  $rs$  i  $r^2s$ . Com que  $\mathbb{D}_3$  és un subgrup de  $\mathbb{D}_6$ , aquestes tres simetries han de ser tres de les simetries de  $\mathbb{D}_6$ . Tenim dues possibilitats: d'una banda, poden ser les simetries amb eixos que formen un angle de  $\pi/6$ ,  $\pi/2$  i  $5\pi/6$  amb el vector  $a$ ; d'altra banda, aquelles d'eixos que formen un angle de  $0$ ,  $\pi/3$  i  $2\pi/3$  amb el vector  $a$ . Sigui  $r$  la rotació d'angle  $2\pi/3$ , aleshores segons quines tres simetries prenem, podrem prendre una base o una altra de  $\mathbb{D}_3$ .

$$\mathbb{D}_{3,l} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

i

$$\mathbb{D}_{3,s} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

És el primer cas en que ens trobem que un mateix subgrup de translació i un mateix subgrup puntual determinen més d'un grup cristal·logràfic. Concretament en defineixen dos,  $G_3^1$  i  $G_3^2$ . En el primer cas, la presentació és

$$G_3^1 = \langle a, b, r, s \mid ab = ba, r^3 = 1, a^r = b, b^r = (ab)^{-1}, s^2 = 1, a^s = a, b^s = (ab)^{-1}, (rs)^2 = 1 \rangle, \quad (5.9)$$

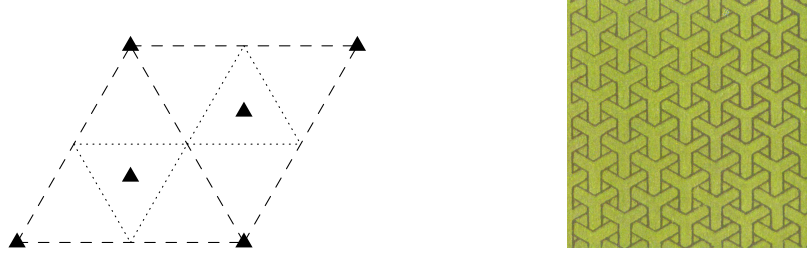
on  $s$  és una simetria d'eix paral·lel al vector  $a$  i  $rs$  és una simetria d'eix paral·lel al vector  $a + b$ .

Les relacions es dedueixen al fer l'acció de  $G_0$  sobre  $T$ . Per deduir les relacions, observem l'acció de  $G_0$  sobre  $T$ . L'acció per la rotació ja s'ha vist en el cas del grup  $G_3$ , per tant, només falta veure l'acció de  $s$ , que desenvolupem a continuació.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

és a dir, en efecte, deixa invariant  $a$  i envia  $b$  a  $-a - b$ .

Anem a veure una representació esquemàtica i un exemple real del grup.

Figura 5.10: Grup  $G_3^1$ . Estampat xinès.

En el segon cas, en què el subgrup puntual és  $\mathbb{D}_{3,l}$ , la presentació és

$$G_3^2 = \langle a, b, r, s \mid ab = ba, r^3 = 1, a^r = b, b^r = (ab)^{-1}, s^2 = 1, a^s = ab, b^s = -b, (rs)^2 = 1 \rangle, \quad (5.10)$$

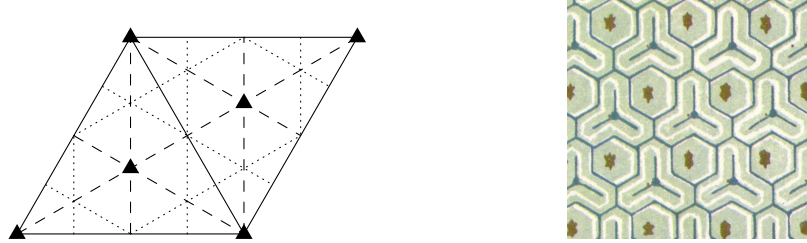
on  $s$  és una simetria respecte l'eix que forma un angle de  $\pi/6$  amb el vector  $a$  i  $rs$  ho és respecte l'eix que forma un angle de  $\pi/2$  respecte el vector  $a$ .

Per deduir les relacions, observem l'acció de  $G_0$  sobre  $T$ . Igual que en el cas anterior, només desenvolupem l'acció de  $s$  sobre  $T$  de la següent manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

és a dir, envia  $a$  a  $a + b$  i  $b$  a  $-b$ .

Així doncs, veiem una representació esquemàtica i un exemple real del grup.

Figura 5.11: Grup  $G_3^2$ . Estampat persa.

#### 5.2.4 Reticles rectangular i rombal

En aquest cas, tenim  $G_0 = \mathbb{D}_1$  o  $\mathbb{D}_2$  que deixen invariant el reticle, és a dir, el subgrup puntual conté rotacions d'ordre màxim 2. A causa d'això, no podem aplicar el lema 5.2.5 que hem utilitzat en els casos anteriors per trobar una base adequada de  $T$ . En els dos casos, considerem una simetria  $s$  en  $G_0$ . Sigui  $t \in T$  un vector no nul paral·lel a l'eix de simetria de  $s$ . Atès que  $s$  envia  $T$  a  $T$ , els vectors  $t + s(t)$  i  $t - s(t)$  també són elements de  $T$  de tal manera que  $T$  conté vectors no nuls paral·lels i perpendiculars a l'eix de simetria.





Siguin  $u, v$  dos vectors no nuls de longitud mínima paral·lel i perpendicular a l'eix de simetria, respectivament. Per la discreció de  $T$ , aquests vectors existeixen i, a més, qualsevol vector paral·lel, o respectivament perpendicular, a l'eix de simetria és un múltiple enter de  $u$ , o respectivament de  $v$ . Així, per qualsevol  $t \in T$ , tenim

$$\begin{aligned} t + s(t) &= m_t u, \\ t - s(t) &= n_t v, \end{aligned}$$

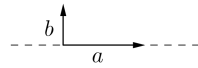
per certs  $m_t, n_t \in \mathbb{Z}$ . Resolent-ho, obtenim

$$t = \frac{m_t}{2}u + \frac{n_t}{2}v.$$

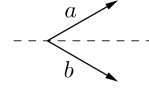
Ara, si per tot  $t \in T$ , tant  $m_t$  com  $n_t$  són parells, obtenim una base  $\{u, v\}$  de  $T$ . Altrament, si  $m_t$  o  $n_t$  és senar per algun  $t \in T$ , aleshores els dos enters són senars ja que sinó  $\frac{1}{2}u$  o  $\frac{1}{2}v$  estarien a  $T$ , contradint la minimalitat de  $u$  i  $v$ . Sigui  $a = \frac{1}{2}(u+v)$  i  $b = \frac{1}{2}(u-v) = s(a)$ , aleshores  $a, b \in T$  i

$$\begin{aligned} t &= \frac{m_t}{2}u + \frac{n_t}{2}v \\ &= \left(\frac{m_t + n_t}{2}\right)\left(\frac{u+v}{2}\right) + \left(\frac{m_t - n_t}{2}\right)\left(\frac{u-v}{2}\right) \\ &= m'_t a + n'_t b, \end{aligned}$$

amb  $m'_t, n'_t \in \mathbb{Z}$ . Atès que tot  $t$  és combinació lineal entera de  $a$  i  $b$ , podem assegurar que  $\{a, b\}$  és una base de  $T$ .



(a) Primer cas: base  $\{a, b\}$  rectangular.



(b) Segon cas: base  $\{a, b\}$  rombal.

Figura 5.12: Bases rectangular i rombal.

Amb aquests dos tipus de reticles i amb subgrups puntuals isomorfs a  $\mathbb{D}_1$  i  $\mathbb{D}_2$ , completarem la classificació dels grups cristal·logràfics. Per cadascun d'aquests grups, considerem dues possibilitats que corresponen amb les diferents accions sobre  $T$ . Els denotarem per  $p$  o  $c$  segons si el reticle obtingut és rectangular o rombal, respectivament.

Considerem, primer, el cas del diedral d'ordre 1 amb dues possibilitats de generadors segons quina simetria prenem:

$$\mathbb{D}_{1,p} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

generat per una simetria  $s$  d'eix paral·lel al vector  $a$  i que, per tant, deixa invariant  $a$  i envia  $b$  a  $-b$ ; i

$$\mathbb{D}_{1,c} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

generat per una simetria  $s$  d'eix paral·lel al vector  $a + b$  que envia  $a$  a  $b$  i viceversa.

Prenent com a subgrup puntual  $\mathbb{D}_{1,p}$ , obtenim dos nous subgrups amb reticle rectangular, ambdós sense cap rotació:  $G_1^1$  amb una simetria  $s$  d'eix paral·lel a  $a$  i  $G_1^3$  amb una simetria lliscant  $s'$  d'eix també paral·lel a  $a$ . Les seves respectives presentacions són, doncs,

$$G_1^1 = \langle a, b, s \mid ab = ba, s^2 = 1, a^s = a, b^s = b^{-1} \rangle, \quad (5.11)$$

i

$$G_1^3 = \langle a, b, s' \mid ab = ba, (s')^2 = a, a^{s'} = a, b^{s'} = b^{-1} \rangle. \quad (5.12)$$

Les relacions es dedueixen de l'acció de  $s'$  sobre  $a$  i  $b$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Anem a veure representacions esquemàtiques dels dos grups així com aplicacions reals.

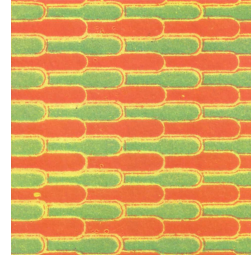


Figura 5.13: Grup  $G_1^1$ . Estampat egipci.



Figura 5.14: Grup  $G_1^3$ . Estampat egipci.

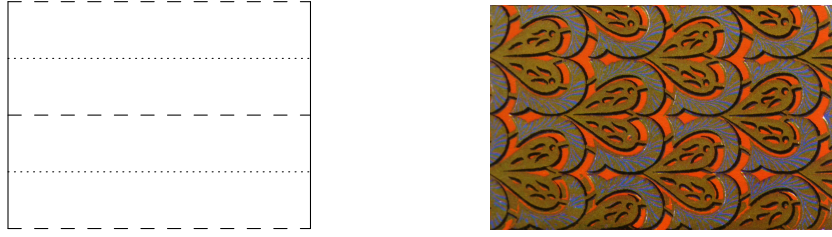
En canvi, prenent com a subgrup puntual  $\mathbb{D}_{1,c}$  apareix el grup  $G_1^2$  sense rotacions i amb simetria  $s$  d'eix paral·lel al vector  $a + b$  i de presentació

$$G_1^2 = \langle a, b, s \mid ab = ba, s^2 = 1, a^s = b, b^s = a \rangle, \quad (5.13)$$

on les relacions es dedueixen de l'acció de  $s$  sobre  $a$  i  $b$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De forma esquemàtica es pot representar de la següent manera, així com també en podem veure un exemple real.

Figura 5.15: Grup  $G_1^2$ . Estampat àrab a l'Alhambra de Granada.

Passem ara a considerar el diedral d'ordre 2. En aquest cas, també tenim dues presentacions possibles ja que s'aprofiten les de  $\mathbb{D}_{1,p}$  i  $\mathbb{D}_{1,c}$  afegint una rotació d'angle  $\pi$  en cada cas. Aquestes dues possibilitats són

$$\mathbb{D}_{2,p} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

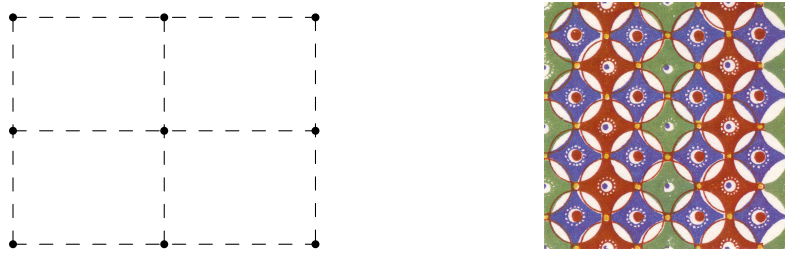
i

$$\mathbb{D}_{2,c} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Arribats a aquest punt, podem definir els quatre grups cristal·logràfics que ens falten, tots ells generats per dues simetries lliscants o no,  $s$  i  $rs$ , i contenint una rotació d'angle  $\pi$ . El primer d'ells ve generat per una simetria d'eix paral·lel al vector  $a$  i una simetria  $rs$  d'eix perpendicular a l'anterior, és a dir, paral·lel a  $b$ . Així doncs, la seva presentació és

$$G_2^1 = \langle a, b, r, s \mid ab = ba, r^2 = 1, a^r = a^{-1}, b^r = b^{-1}, s^2 = 1, a^s = a, b^s = b^{-1}, (rs)^2 = 1 \rangle. \quad (5.14)$$

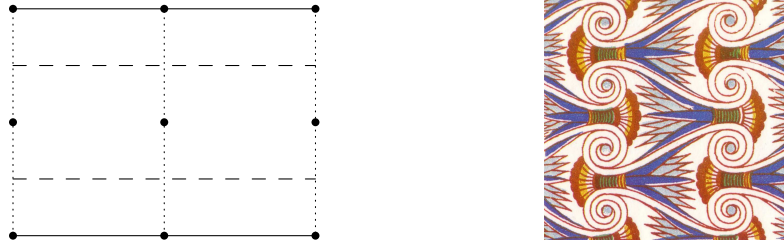
A continuació, veiem una figura esquemàtica del motiu base del grup i una aplicació a la realitat.

Figura 5.16: Grup  $G_2^1$ . Estampat egipci.

El segon és igual que l'anterior però  $rs$  és una simetria lliscant i, per tant, té presentació

$$G_2^2 = \langle a, b, r, s \mid ab = ba, r^2 = 1, a^r = a^{-1}, b^r = b^{-1}, s^2 = 1, a^s = a, b^s = b^{-1}, (rs)^2 = b \rangle. \quad (5.15)$$

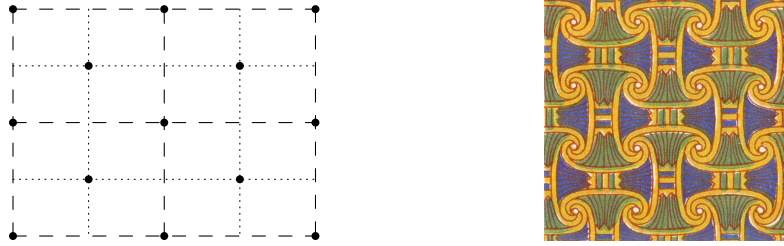
Veiem-ne un esbós de la figura base i una aplicació real.

Figura 5.17: Grup  $G_2^2$ . Estampat egipci.

El tercer d'aquests grups segueix el mateix que els anteriors però amb els eixos de simetria rotats  $\pi/2$ , és a dir,  $s$  simetria d'eix paral·lel al vector  $a + b$  i  $rs$  simetria d'eix perpendicular al de  $s$ . D'aquesta manera, la seva presentació és

$$G_2^3 = \langle a, b, r, s \mid ab = ba, r^2 = 1, a^r = a^{-1}, b^r = b^{-1}, s^2 = 1, a^s = b, b^s = a, (rs)^2 = 1 \rangle. \quad (5.16)$$

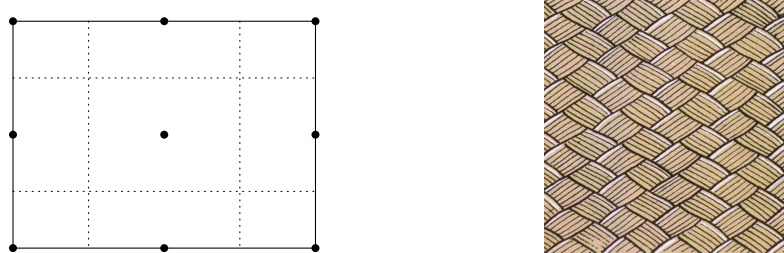
En veiem un esquema base i una aplicació a la realitat.

Figura 5.18: Grup  $G_2^3$ . Estampat egipci.

Per últim, tenim el grup generat per les translacions  $a$  i  $b$ , una rotació  $r$  d'angle  $\pi$  i dues simetries amb lliscament d'eixos paral·lels als vectors  $a$  i  $b$ , respectivament. La seva presentació és

$$G_2^4 = \langle a, b, r, s \mid ab = ba, r^2 = 1, a^r = a^{-1}, b^r = b^{-1}, s^2 = a, a^s = a, b^s = b^{-1}, (rs)^2 = b \rangle. \quad (5.17)$$

De forma esquemàtica, veiem la representació següent així com una aplicació en la realitat.

Figura 5.19: Grup  $G_2^4$ . Estampat persa.

Amb això, s'acaba la classificació dels 17 grups de simetria del pla o grups cristal·logràfics. Tal com ja hem dit abans de començar, observem que només hem tractat amb 13 possibilitats pel subgrup puntual:

$$C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, \mathbb{D}_{1,p}, \mathbb{D}_{1,c}, \mathbb{D}_{2,p}, \mathbb{D}_{2,c}, \mathbb{D}_{3,l}, \mathbb{D}_{3,s}, \mathbb{D}_4 \text{ i } \mathbb{D}_6$$

però, en canvi, hem obtingut més grups tal i com hem justificat anteriorment.

Podem resumir la classificació que acabem d'estudiar en la taula següent.

Grup cristal·logràfic pla	Subgrup puntual
$G_1$	$C_1$
$G_1^1$	$\mathbb{D}_{1,p}$
$G_1^2$	$\mathbb{D}_{1,c}$
$G_1^3$	$\mathbb{D}_{1,p}$
$G_2$	$C_2$
$G_2^1$	$\mathbb{D}_{2,p}$
$G_2^2$	$\mathbb{D}_{2,p}$
$G_2^3$	$\mathbb{D}_{2,c}$
$G_2^4$	$\mathbb{D}_{2,p}$
$G_3$	$C_3$
$G_3^1$	$\mathbb{D}_{3,s}$
$G_3^2$	$\mathbb{D}_{3,l}$
$G_4$	$C_4$
$G_4^1$	$\mathbb{D}_4$
$G_4^2$	$\mathbb{D}_4$
$G_6$	$C_6$
$G_6^1$	$\mathbb{D}_6$

Taula 5.1: Grups cristal·logràfics plans segons el seu subgrup puntual.

Per últim, remarcar que hem posat un exemple real de cada grup però se'n troben molts més. El mateix artista M. C. Escher en té exemples per cadascun d'ells.



# Bibliografia

- [1] Armstrong, M. A. *Groups and Symmetry*. Nova York. Springer-Verlag, 1988.
- [2] Burillo, J. *Estructures Algebraiques* (apunts). Barcelona. 2012-2013.
- [3] Coxeter, H. S. M. *Introduction to Geometry*. Segona edició. Toronto. Wiley Classics Library, 1989.
- [4] Johnson, D. L. *Symmetries*. Primera edició. Londres. Springer-Verlag, 2001.
- [5] Morandi, P. J. *The Classification of Wallpaper Patterns: From Group Cohomology to Escher's Tessellations*. Department of Mathematical Sciences. New Mexico State University.
- [6] Pascual, P. *Geometria Afi i Euclidiana* (apunts). Barcelona. 2012-2013.
- [7] Rotman, J. J. *An Introduction to the Theory of Groups*. Quarta edició. Nova York. Springer-Verlag, 1995.
- [8] Singer, D. A. *Geometry: Plane and Fancy*. Nova York. Springer, 1998.
- [9] Jones, O. *The Grammar of Ornament*. Quaritch, 1910. [Consulta: 12 de juny de 2014] Disponible a:  
<<http://digital.library.wisc.edu/1711.d1/DLDecArts.GramOrnJones>>.
- [10] *Math and the Art of M.S. Escher*. [Consulta: 15 de juny de 2014] Disponible a  
<[http://mathcs.slu.edu/escher/index.php/Math\\_and\\_the\\_Art\\_of\\_M.\\_C.\\_Escher](http://mathcs.slu.edu/escher/index.php/Math_and_the_Art_of_M._C._Escher)>.
- [11] *Wallpaper groups*. [Consulta: 15 de juny de 2014] Disponible a  
<[http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper\\_group](http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group)>.